수능완성

수학영역 | **수학 Ⅰ·수학 Ⅱ·확률과 통계**

이 책의 **구성과 특징**

STRUCTURE

이 책의 구성

❶ 유형편

출제유형에 제시된 유형의 대표기출문제와 유제들로 유형별 학습을 할 수 있도록 하였다.

❷ 실전편

실전 모의고사 5회 구성으로 수능에 대비할 수 있도록 하였다.

2022학년도 대학수학능력시험 수학영역

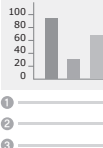
❶ 출제원칙

수학 교과의 특성을 고려하여 개념과 원리를 바탕으로 한 사고력 중심의 문항을 출제한다.

❷ 출제방향

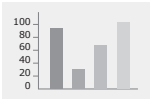
- 단순 암기에 의해 해결할 수 있는 문항이나 지나치게 복잡한 계산 위주의 문항 출제를 지양하고 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제한다.
- 2015 개정 수학과 교육과정에 따라 이수한 수학 과목의 개념과 원리 등은 출제범위에 속하는 내용과 통합하여 출제할 수 있다.
- 수학영역은 교육과정에 제시된 수학 교과의 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분, 기하 과목을 바탕으로 출제한다.

❸ 출제범위

- '공통과목 + 선택과목' 구조에 따라 공통과목(수학Ⅰ, 수학Ⅱ)은 공통 응시하고 선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하) 중 1개 과목을 선택한다.

구분 영역	문항수	문항유형	배점		시험 시간	출제범위(선택과목)
			문항	전체		
수학	30	5지 선다형, 단답형	2점 3점 4점	100점	100분	• 공통과목: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ • 선택과목(택1): 확률과 통계, 미적분, 기하 • 공통 75%, 선택 25% 내외 • 단답형 30% 포함

이 책의 **차례**

CONTENTS

유형편

01 지수함수와 로그함수

1 거듭제곱근

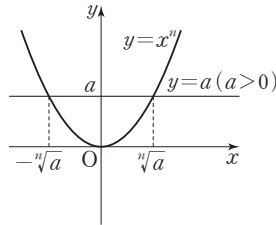
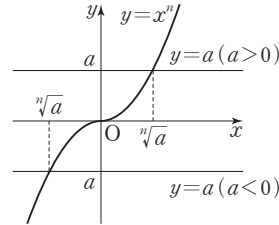
(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

(2) 실수인 거듭제곱근

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

참고 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 할 때, x의 개수는 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

[n이 짝수인 경우]

[n이 홀수인 경우]

2 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(4) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

참고 a가 실수일 때, $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

3 지수의 확장(1) – 정수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^ma^n=a^{m+n}$

② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^nb^n$

4 지수의 확장(2) – 유리수

(1) 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s=a^{r+s}$ ② $a^r \div a^s=a^{r-s}$ ③ $(a^r)^s=a^{rs}$ ④ $(ab)^r=a^r b^r$

5 지수의 확장(3) – 실수

(1) 무리수인 지수

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로 무리수 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\cdots$을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $2^{1.41421}$, $\cdots$은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a>0$이고 x가 무리수일 때, a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y=a^{x-y}$ ③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^x b^x$

6 로그의 뜻

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나만 존재한다.

이 x를 $\log_a N$으로 나타내고, 이것을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 하며, N을 $\log_a N$의 진수라고 한다. 즉,

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

(2) 로그의 밑과 진수의 조건

$\log_a N$이 정의되려면 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고 진수 N은 $N>0$이어야 한다.

7 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

8 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고, $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

9 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

양수 N에 대하여 $\log_{10} N$과 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

(2) 상용로그표

상용로그표는 1.00부터 9.99까지 0.01의 간격의 수에 대한 상용로그의 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

(3) 상용로그표를 보는 법

상용로그표에서 $\log 2.34$의 값을 찾으려면 2.3의 행과 표의 맨 윗줄에 있는 4의 열이 만나는 수 .3692를 찾으면 된다.

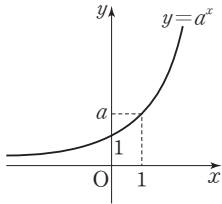
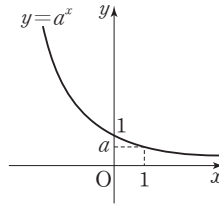
즉, $\log 2.34=0.3692$

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0										
⋮										
2.3					.3692					
⋮										
9.9										

10 지수함수의 뜻과 그래프

(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x의 값이 하나씩 정해지므로 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

(2) 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a>1$일 때

② $0<a<1$일 때

11 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축 (직선 $y=0$)이다.

참고 (1) 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 서로 대칭이다.

(2) 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

12 지수함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq1$일 때, $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$

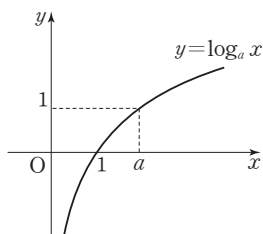
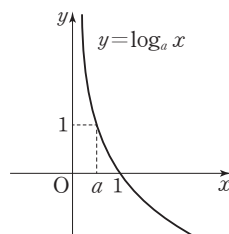
(2) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

13 로그함수의 뜻과 그래프

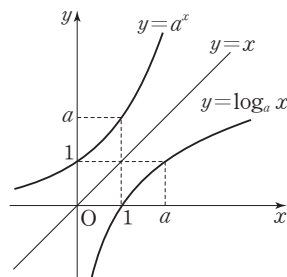
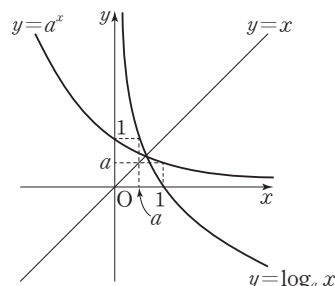
(1) a가 1이 아닌 양수일 때, 임의의 양의 실수 x에 대하여 $\log_a x$의 값이 하나씩 정해지므로 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

(2) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의에 의하여 $y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y$이고, $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 $y=a^x$의 역함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$을 얻을 수 있다.

(3) 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $a>1$일 때

② $0<a<1$일 때

참고 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이고, 그 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① $a>1$일 때

② $0<a<1$일 때

14 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축(직선 $x=0$)이다.

참고 (1) 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

(2) 함수 $y=\log_a (x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

15 로그함수의 활용

(1) $a>0,\ a\neq1$일 때, $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$
$0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

유형 1 거듭제곱근의 뜻과 성질

출제유형 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 거듭제곱근의 뜻과 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 실수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 실수 x는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$

② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

출제 의도

거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$일 때

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$일 때

즉, $3<n<6$이고 n이 짝수이어야 하므로 n은 4이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

01

▸ 21054-0001

$\dfrac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2+\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02

▸ 21054-0002

실수 a의 세제곱근 중 실수인 것과 8의 여섯제곱근 중 음의 실수인 것이 서로 같고, 양의 실수 b의 제곱근 중 양의 실수인 것과 $\sqrt[4]{8}$의 세제곱근 중 실수인 것이 서로 같다. $a+b$의 값은?

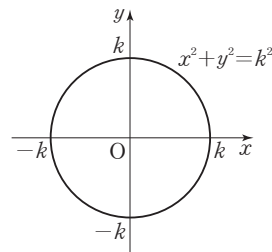
① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

03

▸ 21054-0003

중심이 원점이고 반지름의 길이가 k $(k>2)$인 원 위의 점 중 y좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합을 A라 하고, 집합 A에 대하여 집합 B는 다음과 같다.

$B=\{x\,|\,x$는 a의 n제곱근 중 양의 실수, $(a,\ n)\in A\}$

집합 B의 원소의 개수가 7일 때, k^2의 최댓값을 구하시오.

유형 2 지수의 확장과 지수법칙

출제유형 | 거듭제곱근을 지수가 유리수인 꼴로 나타내는 문제, 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a\neq0$이고 n은 양의 정수일 때

① $a^0=1$　　② $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

(2) 유리수인 지수

$a>0$이고 m이 정수, n이 2 이상의 양의 정수일 때

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(3) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$　　② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$　　④ $(ab)^x=a^xb^x$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

16×2^{-3}의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

출제 의도

지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$16\times2^{-3}=2^4\times2^{-3}=2^{4+(-3)}=2^1=2$$

답 ②

04 ▸ 21054-0004

$27^{-1}\div\left(\frac{1}{9}\times\sqrt[3]{81}\right)^{\frac{9}{2}}$의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$　② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$　③ 1　④ $\sqrt[3]{3}$　⑤ $\sqrt[3]{9}$

05 ▸ 21054-0005

두 실수 a, b에 대하여

$$2^{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3},\ 2^{a-\frac{b}{2}}=27$$

일 때, $\sqrt{2^{3a}}\times\sqrt[3]{2^b}$의 값은?

① $3^{\frac{1}{6}}$　② $3^{\frac{1}{5}}$　③ $3^{\frac{1}{4}}$　④ $3^{\frac{1}{3}}$　⑤ $3^{\frac{1}{2}}$

06 ▸ 21054-0006

실수 x와 0이 아닌 정수 n에 대하여

$$9^x-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$$

을 만족시키도록 x, n의 값을 정할 때, $9^x+9^{-x}-2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

유형 3 로그의 뜻과 기본 성질

출제유형 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

(2) $\log_a N$이 정의되려면 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고 진수 N은 $N>0$이어야 한다.

(3) $a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$의 값은? [4점]

① $\log 2+\log 3$ ② $2\log 2+\log 3$
③ $\log 2+2\log 3$ ④ $2\log 2+2\log 3$
⑤ $3\log 2+2\log 3$

출제 의도

로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$은 짝수이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$

$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 4+\log 6-\log 9+\log 12+\log 18-\log 36$

$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$

$=\log 6$

$=\log 2+\log 3$

답 ①

07

▸ 21054-0007

모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a+3|}(x^2+ax-a+3)$의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

08

▸ 21054-0008

$\log_2 30-\log_2\dfrac{3}{2}-\log_2\dfrac{5}{4}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

09

▸ 21054-0009

두 양수 a, b $(b\neq1)$에 대하여 $a^2b^{-3}=1$일 때, $\log_b(a^m\times\sqrt{b^n})=10$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

유형 4 로그의 여러 가지 성질

출제유형 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$이다.)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq1$) [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

출제 의도

로그의 밑의 변환을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

즉, $\dfrac{\log_4 a}{2}=\dfrac{\log_2 b}{3}$에서 $\dfrac{1}{4}\log_2 a=\dfrac{1}{3}\log_2 b$이므로

$\log_2 a=\dfrac{4}{3}\log_2 b$

따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{\log_2 b}{\dfrac{4}{3}\log_2 b}=\dfrac{3}{4}$

답 ③

10

▸ 21054-0010

$\left(4^{\log_2 \frac{1}{3}}\right)^{\log_3 \frac{1}{6}}$의 값은?

① 4 ② 9 ③ 16

④ 25 ⑤ 36

11

▸ 21054-0011

등식 $\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{1}{\log_3 a}+\dfrac{\log_{25} a}{\log_5 a}=1$을 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오. (단, $a\neq1$)

12

▸ 21054-0012

세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}$

(나) $\log_2 \dfrac{bc}{a}=3$

1보다 큰 두 실수 m, n이 $\log_2 a\times\log_m b\times\log_n c=1$을 만족시킬 때, $\log_2 mn$의 최솟값은?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$

④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

수학 I

유형 5 지수함수와 그 그래프

출제유형 | 지수함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 밑의 범위에 따른 지수함수의 증가와 감소, 지수함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

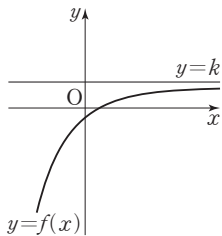
출제 의도

지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 이해하고, 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$이므로

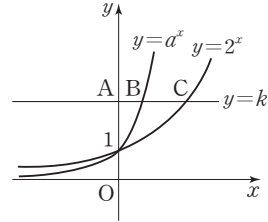
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 $f(0)\le0$이어야 한다.

$f(0)=-2^4+k\le0$에서 $k\le16$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 16이다.

답 ④

13 ▸ 21054-0013

직선 $y=k$ $(k>1)$이 y축 및 두 곡선 $y=a^x$ $(a>2)$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}=1:2$일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

14 ▸ 21054-0014

곡선 $y=4^{-x+1}+a$가 곡선 $y=3^x+1$과 제2사분면에서 만나고 곡선 $y=2^x-4$와 제4사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

15 ▸ 21054-0015

함수 $f(x)=2^{x+3}+k$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AO의 길이가 자연수가 되도록 상수 k의 값을 정할 때 삼각형 AOB의 넓이는 $k=s$에서 최솟값 S를 갖는다. $S-s$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

유형 6 지수함수의 활용

출제유형 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) $a>1$일 때

$a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

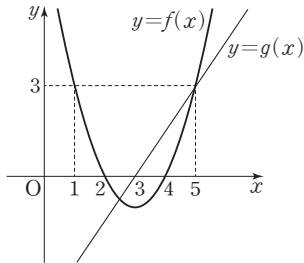
$0<a<1$일 때

$a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

출제 의도

지수함수의 성질을 이용하여 지수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

$f(x)g(x)\leq3g(x)$, $g(x)\{f(x)-3\}\leq0$

(i) $g(x)<0$인 경우

$f(x)-3\geq0$에서 $f(x)\geq3$

그림에서 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x<3$이고, $f(x)\geq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x\leq1$ 또는 $x\geq5$이므로 $x\leq1$

(ii) $g(x)=0$인 경우

$g(x)\{f(x)-3\}=0\leq0$이므로 $x=3$

(iii) $g(x)>0$인 경우

$f(x)-3\leq0$에서 $f(x)\leq3$

그림에서 $g(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $x>3$이고, $f(x)\leq3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $1\leq x\leq5$이므로 $3<x\leq5$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x\leq1$ 또는 $3\leq x\leq5$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+3+4+5=13$

답 ④

16
▸ 21054-0016

방정식

$$9^{x+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}+24$$

의 해를 α라 할 때, $6\alpha+5$의 값을 구하시오.

17
▸ 21054-0017

부등식

$$2^x\times4^{x^2-\frac{5}{2}x}\leq2\times\left(\frac{1}{8}\right)^{x-3}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

18
▸ 21054-0018

10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|3^x-a|+b$$

라 하자. x에 대한 방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

유형 7 로그함수와 그 그래프

출제유형 | 로그함수의 성질과 그 그래프의 특징을 이해하고 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

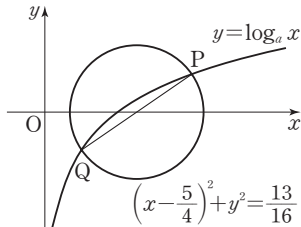
출제유형잡기 | 로그함수의 그래프의 점근선, 평행이동과 대칭이동, 밑의 범위에 따른 함수의 증가와 감소를 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원 $C : \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자.

선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

출제 의도

로그함수의 그래프 위의 점의 좌표에 대하여 로그의 성질과 원의 성질을 이용하여 a의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$ $(p>q)$로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $p+q=\frac{5}{2}$

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a pq=0$, $pq=a^0=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$에서 $2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$, 즉 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$(\log_a 4)^2=1$

이때 $a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

답 ③

19

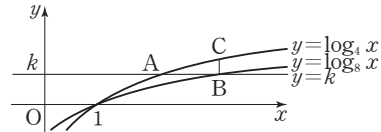
▸ 21054-0019

함수 $y=\log_2(2x+a)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는 원점을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-2$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

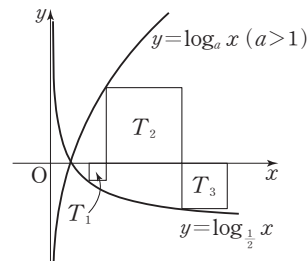
20

▸ 21054-0020

직선 $y=k$ $(k>0)$이 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_8 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 C라 하자. 세 점 O, A, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $1-\frac{1}{2}\log_2 3$　② $-2+\frac{3}{2}\log_2 3$　③ $2-\log_2 3$　④ $-1+\log_2 3$　⑤ $\frac{1}{2}\log_2 3$

21

▸ 21054-0021

그림과 같이 세 개의 정사각형 T_1, T_2, T_3이 한 변은 x축 위에 있고 T_2는 T_1, T_3과 각각 한 꼭짓점만을 공유하며 T_1, T_3의 한 꼭짓점은 각각 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위에 있고, T_2의 한 꼭짓점은 곡선 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 위에 있다. T_1, T_3의 넓이가 각각 1, 9일 때 a^{10}의 값을 구하시오. (단, T_1, T_3은 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 각각 한 점에서만 만나고, T_2는 곡선 $y=\log_a x$와 한 점에서만 만난다.)

유형 8 로그함수의 활용

출제유형 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 진수에 미지수가 포함된 방정식, 부등식의 해를 구할 때에는 다음과 같은 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) $a>1$일 때

$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$

$0<a<1$일 때

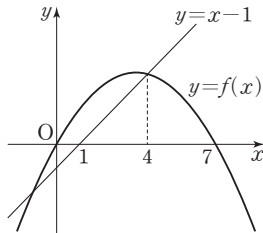
$\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$) [3점]

출제 의도

로그의 정의와 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$이므로

$f(x)>0,\ x-1>0,\ f(x)\le x-1$

(i) $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<7$

(ii) $x-1>0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$

(iii) $f(x)\le x-1$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$x>1$일 때 $x\ge4$

(i), (ii), (iii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$4\le x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

답 15

22

▸ 21054-0022

방정식 $\log_3(4x+11)=1+2\log_3(x+1)$의 해를 α라 할 때, 12α의 값을 구하시오.

23

▸ 21054-0023

x에 대한 방정식

$$\log_2(x+3)+\log_2(5-x)=a$$

가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

24

▸ 21054-0024

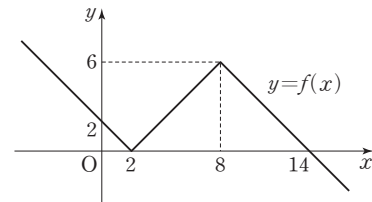
함수

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le2)\\ x-2 & (2<x\le8)\\ -x+14 & (x>8)\end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge-5$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

유형 9 지수함수와 로그함수의 관계

출제유형 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 활용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프, 지수의 성질과 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

출제 의도

지수함수, 로그함수의 그래프와 두 함수의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=2^{x-m}+2$ …… ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_2 8(x-2)$ …… ㉡

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 ㉠의 역함수이므로

㉠에서 $2^{x-m}=y-2$

$x-m=\log_2(y-2)$

$x=\log_2(y-2)+m$

x, y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x-2)+m$

$=\log_2(x-2)+\log_2 2^m$

$=\log_2 2^m(x-2)$

이 함수가 ㉡과 같아야 하므로

$2^m=8$

따라서 $m=3$

답 ③

25 ▸ 21054-0025

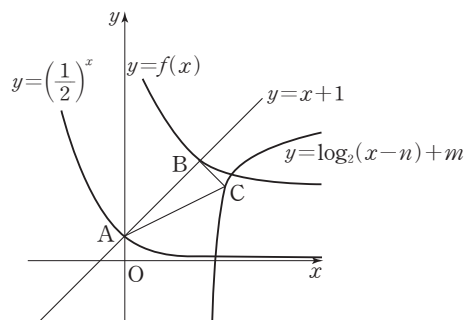
두 함수 $f(x)=\log_9(x-3)+2$, $g(x)=3^{ax-4}+b$가 있다. 3보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$가 성립할 때, $2a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

26 ▸ 21054-0026

함수 $f(x)=\begin{cases} 4^x & (x<0) \\ \log_3(x+1)+1 & (x\geq 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)|$를 만족시키는 자연수 a의 값을 구하시오.

27 ▸ 21054-0027

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 양의 실수이다.)

유형 10 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 주어진 범위에서 지수함수와 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 밑의 범위에 따른 지수함수와 로그함수의 증가와 감소를 이해하여 주어진 구간에서 지수함수 또는 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

출제 의도

주어진 범위에서 지수함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 $1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 $1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=2$

답 ②

28

▸ 21054-0028

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)=\log_2\left(x^2-x+\frac{3}{4}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $(2^M)^m$의 값은?

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$
④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

29

▸ 21054-0029

정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 1\}$인 함수 $f(x)=2\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^x$의 최댓값이 72일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, a는 양수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

30

▸ 21054-0030

정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\le x\le 16\right\}$인 함수 $f(x)=\log_{(a+1)}x$의 최댓값이 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?
(단, $a>-1,\ a\ne 0$)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

수학 I

02 삼각함수

1 일반각과 호도법

(1) 일반각 : 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 각의 크기 중 하나를 $\alpha°$라 할 때, $\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수)로 나타내어지는 각 θ를 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

(2) 육십분법과 호도법

① 1라디안$=\frac{180°}{\pi}$　　② $1°=\frac{\pi}{180}$라디안

(3) 부채꼴의 호의 길이와 넓이

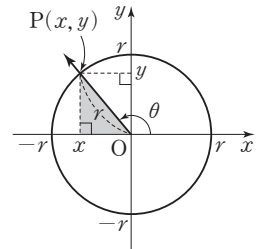
반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

① $l=r\theta$　　② $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

2 삼각함수

(1) 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P(x, y)라 하고, x축의 양의 방향을 시초선으로 하는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

(2) 삼각함수 사이의 관계

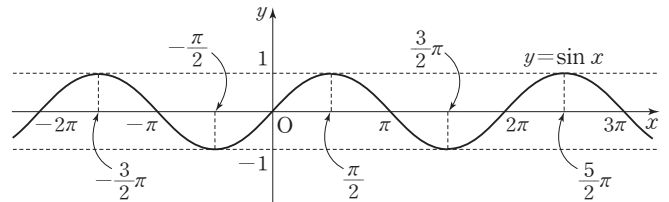
① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3 삼각함수의 그래프

(1) 사인함수 $y=\sin x$의 그래프와 성질

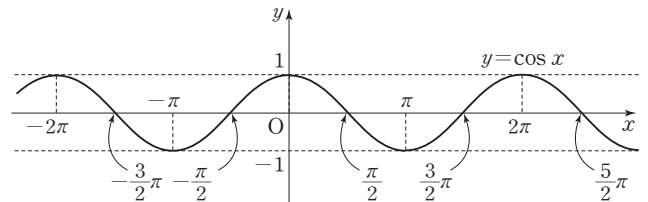
① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\le y\le1\}$이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\sin(-x)=-\sin x$이다.

③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (n은 정수)이다.

(2) 코사인함수 $y=\cos x$의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\le y\le1\}$이다.

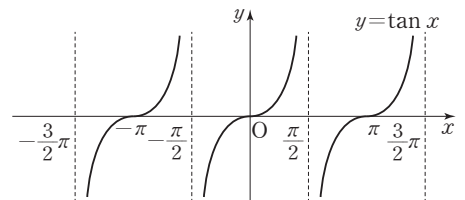
② 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\cos(-x)=\cos x$이다.

③ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $\cos(x+2n\pi)=\cos x$ (n은 정수)이다.

(3) 탄젠트함수 $y=\tan x$의 그래프와 성질

① 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수 x에 대하여 $\tan(-x)=-\tan x$이다.

③ 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

4 삼각함수의 성질

(1) $\pi \pm x$의 삼각함수

① $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$ ② $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$

③ $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

(1) **방정식에의 활용** : 방정식 $2\sin x=1$, $-2\sin x=1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ (k는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$에 대한 방정식도 $\sin x$에 대한 방정식과 같은 방법으로 해결한다.)

(2) **부등식에의 활용** : 부등식 $2\sin x>1$, $2\sin x<-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x<k$, k는 실수)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$를 그린다.

③ 두 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

④ $\sin x>k$ ($\sin x<k$)의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽(아래쪽)에 있는 x의 값의 범위를 구한다.

(삼각함수 $\cos x$, $\tan x$에 대한 부등식도 $\sin x$에 대한 부등식과 같은 방법으로 해결한다.)

6 사인법칙

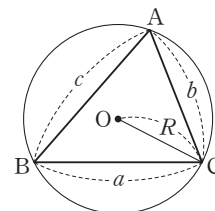
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

참고 사인법칙을 변형하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

(1) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

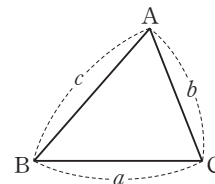
(2) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

(3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

7 코사인법칙

삼각형 ABC에서

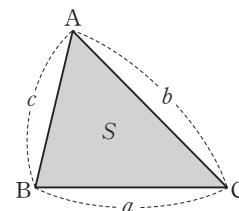
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ (3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

참고 코사인법칙을 변형하면 다음과 같다.

(1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (2) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (3) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

8 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

정답과 풀이 8쪽

유형 1 부채꼴의 호의 길이와 넓이

출제유형 | 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

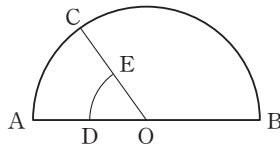
출제유형잡기 | 부채꼴의 반지름의 길이 r와 중심각의 크기 θ를 알 때 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S는 다음 공식을 이용하여 구한다.

(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

필수 유형

그림과 같이 중점이 O인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 C에 대하여 호 BC의 길이는 호 AC의 길이의 2배이고 두 선분 OA, OC의 중점을 각각 D, E라 하자. 부채꼴 OCB의 넓이가 12π일 때, 부채꼴 ODE의 호 DE의 길이는?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

출제 의도

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{BC}=1:2$이므로 두 부채꼴 OCB, ODE의 중심각의 크기는 각각 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3}$이다.

부채꼴 OCB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{2}{3}\pi=12\pi$

$r^2=36$에서 $r=6$

따라서 호 DE의 길이는

$\frac{6}{2}\times\frac{\pi}{3}=\pi$

답 ②

01

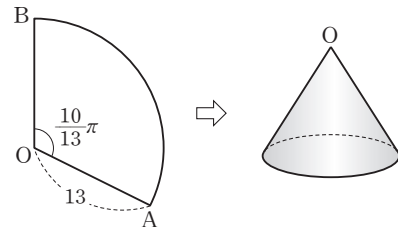
▸ 21054-0031

호의 길이가 2π, 넓이가 10π인 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 할 때, $\frac{r\pi}{\theta}$의 값을 구하시오.

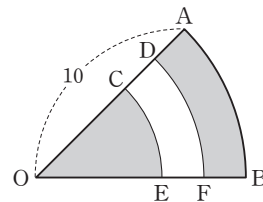
02

▸ 21054-0032

그림과 같이 반지름의 길이가 13, 중심각의 크기가 $\frac{10}{13}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 이 부채꼴을 선분 OA와 선분 OB가 맞닿아 만든 원뿔 모양의 용기의 부피는?

① 80π ② 90π ③ 100π
④ 110π ⑤ 120π

03

▸ 21054-0033

그림과 같이 반지름의 길이가 10인 부채꼴 모양의 텃밭이 있다. 선분 OA, OB 위에 각각 두 점 C, D와 E, F를 잡아 두 부채꼴 OCE, ODF의 호 CE, DF를 양 끝으로 하는 통로를 만들려고 한다. 두 선분 OC, DA의 길이는 각각 자연수이고 색칠한 두 영역의 넓이는 서로 같다. 세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π일 때, 통로 CEFD의 넓이는? (단, $\overline{OC}=\overline{OE}$, $\overline{OD}=\overline{OF}$)

① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

유형 2 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계

출제유형 | 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 각 θ를 나타내는 동경과 반지름의 길이가 r인 원의 교점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

(2) 삼각함수 사이의 관계

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

필수 유형

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때, $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$의 값은?

① $-\dfrac{8}{3}$ ② $-\dfrac{5}{3}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{4}{3}$

출제 의도

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

따라서

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=-\frac{8}{3}$$

답 ①

04

▸ 21054-0034

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원이 만나는 점의 좌표가 (a, b)이다.

$\sin\theta\times\tan\theta=\dfrac{5}{6}$일 때, $a+b^2$의 값을 구하시오.

05

▸ 21054-0035

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$이고 $\dfrac{\tan\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}=-8$일 때,

$(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+2\cos\theta)^2$의 값은?

① $5-\sqrt{15}$ ② $5-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ③ 5
④ $5+\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $5+\sqrt{15}$

06

▸ 21054-0036

양수 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sin\theta\tan\theta<0$, $\cos\theta\tan\theta>0$
> (나) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이다.

θ의 최솟값을 α라 할 때, $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}$의 값은? (단, 좌표평면에서 시초선은 원점에서 x축의 양의 방향으로 정한다.)

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 3 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질

출제유형 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하는 문제나 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수의 그래프에서 주기, 최댓값과 최솟값, 그래프가 지나는 점을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하거나 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(1) $\pi \pm x$의 삼각함수

① $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$

② $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$

③ $\tan(\pi+x)=\tan x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$

(2) $\frac{\pi}{2}\pm x$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

$\sin\frac{7}{3}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

출제 의도

사인함수의 주기를 이해하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

07

▸ 21054-0037

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{4}{5}$일 때,

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)}$$ 의 값은?

① -7 ② -5 ③ -3

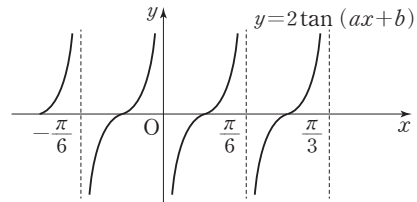
④ 5 ⑤ 7

08

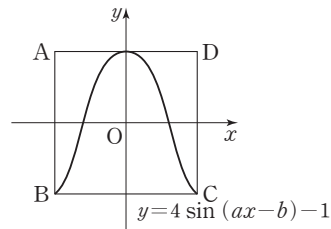
▸ 21054-0038

다음 그림은 함수 $y=2\tan(ax+b)$의 그래프의 일부분이다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a>0$, $0<b<\pi$이다.)

① π ② 2π ③ 3π

④ 4π ⑤ 5π

09

▸ 21054-0039

그림과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하고 두 대각선의 교점이 원점 O가 되도록 놓여 있다. 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프가 선분 AD의 중점에서만 선분 AD에 접하고 두 꼭짓점 B, C를 지나도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은?

① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{25}{18}$ ③ $\frac{14}{9}$

④ $\frac{31}{18}$ ⑤ $\frac{17}{9}$

유형 4 삼각함수의 최댓값과 최솟값

출제유형 | 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 성질 그리고 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프의 성질을 이용하여 삼각함수 또는 삼각함수를 포함한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

출제 의도

사인함수의 치역을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$에서

$x-\frac{3}{4}\pi=\theta$라 하면 $x=\theta+\frac{3}{4}\pi$, $x-\frac{\pi}{4}=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)&=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k\\&=\cos^2\theta+\sin\theta+k\\&=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k\\&=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

모든 실수 θ에 대하여 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$

또 함수 $f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$는 $\sin\theta=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$m=\frac{3}{4}$

따라서 $k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

답 ③

10

▶ 21054-0040

함수 $f(x)=a\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+b$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$이다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 $a>0$이다.)

11

▶ 21054-0041

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=\left|3\sin\frac{x}{2}+k\right|-2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m=5$가 되도록 하는 모든 실수 k의 제곱의 합을 구하시오.

12

▶ 21054-0042

$0\le x<2\pi$에서 함수

$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos^2 x+4\sin x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

유형 5 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

출제유형 | 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프와 직선의 교점이나 위치 관계를 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

$0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$　② π　③ $\frac{7}{6}\pi$　④ $\frac{4}{3}\pi$　⑤ $\frac{3}{2}\pi$

출제 의도

이차방정식의 판별식을 이용하여 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$\sin\theta+2>0$

즉, $2\sin\theta-1>0$에서 $\sin\theta>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

13

▸ 21054-0043

$0\le x<2\pi$에서 방정식

$$1-2\sin^2 x=\cos x$$

의 서로 다른 실근의 개수를 n, 가장 큰 실근을 α라 할 때, $n\alpha$의 값은?

① 3π　② $\frac{7}{2}\pi$　③ 4π　④ $\frac{9}{2}\pi$　⑤ 5π

14

▸ 21054-0044

$0\le x<2\pi$에서 방정식

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\tan 2x=0$$

의 모든 실근의 합은?

① 2π　② 3π　③ 4π　④ 5π　⑤ 6π

15

▸ 21054-0045

$0\le x<2\pi$에서 부등식

$2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때,

$4\alpha+\beta$의 값은?

① 2π　② $\frac{5}{2}\pi$　③ 3π　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ 4π

유형 6 사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기, 외접원의 반지름의 길이 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

가 성립함을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B=\frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

출제 의도

사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=2\times15$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\times15\times\sin B$$
$$=2\times15\times\frac{7}{10}$$
$$=21$$

답 ③

16

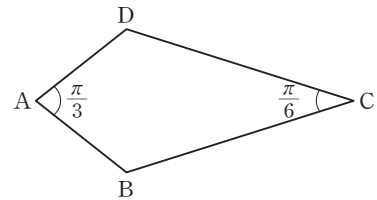
▶ 21054-0046

반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $4\sin(A+C)\sin B=3$일 때, 선분 AC의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② 5 ③ $\sqrt{30}$
④ $\sqrt{35}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

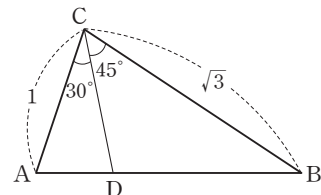
17

▶ 21054-0047

그림과 같이 $A=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{6}$인 사각형 ABCD에서 세 점 A, B, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_1, 세 점 B, C, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R_2라 할 때, $\frac{R_2}{R_1}$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

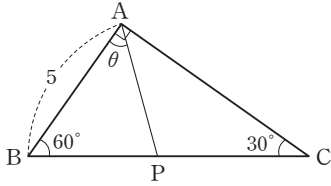
18

▶ 21054-0048

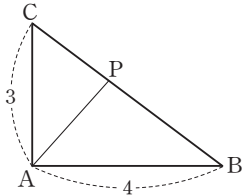
그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}$이다. 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle\mathrm{ACD}=30^\circ$, $\angle\mathrm{BCD}=45^\circ$일 때, $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$의 값은?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

19

▸ 21054-0049

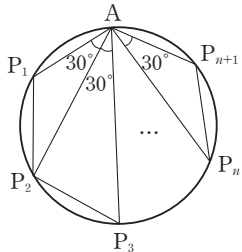
그림과 같이 $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$이고 $\overline{AB}=5$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값을 구하시오. (단, $0°<\theta<90°$)

20

▸ 21054-0050

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 외접원의 넓이를 S_1, 삼각형 APC의 외접원의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 : S_2$는? (단, $\overline{PB}>0$, $\overline{PC}>0$)

① 3 : 2 ② 4 : 3 ③ 9 : 4
④ 16 : 9 ⑤ 36 : 25

21

▸ 21054-0051

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원이 있다. 원 위의 한 점 A를 꼭짓점으로 하고, 점 A에서의 내각이 30°인 삼각형을 원에 내접하여 한 변 또는 두 변이 서로 겹치도록 최대한 붙였을 때, 삼각형들의 꼭짓점들을 점 A로부터 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 차례대로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n, P_{n+1}이라 하자. $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_1P_{k+1}}=6(2+\sqrt{3})$일 때, 원의 반지름의 길이 R의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

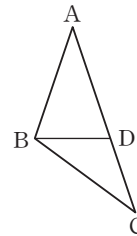
유형 7 코사인법칙

출제유형 | 삼각함수의 성질과 코사인법칙을 이용하여 삼각함수의 값이나 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다음과 같은 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 9월 모의평가 |

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

출제 의도

코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{57}{72}=\frac{19}{24}$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{19}{24}$

$=36+100-95$

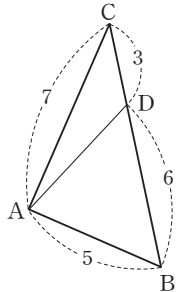
$=41$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{41}$

답 ⑤

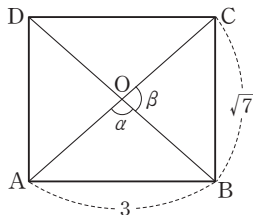
22

▸ 21054-0052

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=7$이다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=3$일 때, 선분 AD의 길이는?

① $\sqrt{19}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{23}$
④ 5 ⑤ $3\sqrt{3}$

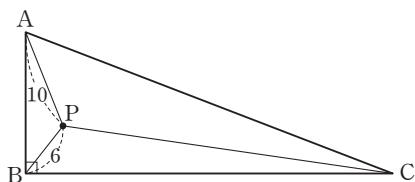
23

▸ 21054-0053

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD에 대하여 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라 하자. $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$라 할 때, $\cos\alpha+\sin\beta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{7}-1}{8}$ ② $\frac{2\sqrt{7}-1}{8}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}-1}{8}$
④ $\frac{4\sqrt{5}-1}{8}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{5}-1}{8}$

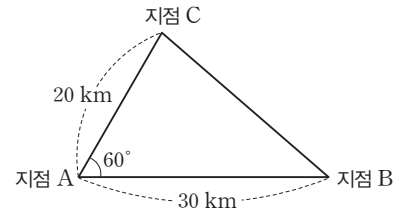
24

▸ 21054-0054

그림과 같이 $B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$이고 $\overline{PA}=10$, $\overline{PB}=6$일 때, 선분 PC의 길이를 구하시오.

25

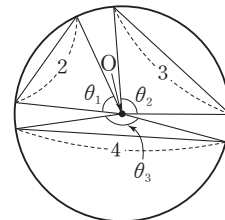
▸ 21054-0055

그림과 같이 $\overline{AB}=30$ km, $\overline{AC}=20$ km인 세 지점 A, B, C에 대하여 $\angle CAB=60^\circ$이다. 여객선 P는 지점 A에서 출발하여 지점 B를 향하여 일정한 속력으로 일직선으로 움직이고 여객선 Q는 지점 C에서 출발하여 지점 A를 향하여 여객선 P의 속력의 두 배의 속력으로 일직선으로 움직인다. 두 여객선 P, Q가 동시에 출발했을 때 두 여객선 P와 Q를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간 두 여객선 사이의 거리는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$ km이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

26

▸ 21054-0056

그림과 같이 원에 길이가 각각 2, 3, 4인 세 개의 현이 있다. 이 세 개의 현 각각에 대응하는 중심각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$가 성립한다. $\cos\theta_1$의 값은?

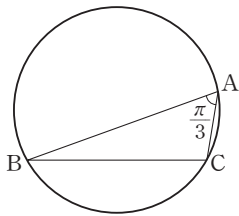
(단, $\theta_3<180^\circ$이고 점 O는 원의 중심이다.)

① $\frac{15}{32}$ ② $\frac{17}{32}$ ③ $\frac{19}{32}$
④ $\frac{21}{32}$ ⑤ $\frac{23}{32}$

유형 8 사인법칙과 코사인법칙의 활용

출제유형 | 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 해결하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 모두 이용하여 삼각형의 변의 길이나 각의 크기 등을 구하는 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 |

$\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times7$, $\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times2\times7=7\sqrt{3}$ ······ ㉠

한편, $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로

$\overline{AC}=k\ (k>0)$에서 $\overline{AB}=3k$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=9k^2+k^2-2\times3k\times k\times\frac{1}{2}$

$=7k^2$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{7}k$ ······ ㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$

$k=\sqrt{21}$

이므로 $k^2=21$

답 21

27

▸ 21054-0057

원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=3$이고

$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{5}$일 때, 이 원의 넓이는?

① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

28

▸ 21054-0058

삼각형 ABC의 각 A, B, C가

$$\sin(B+C)\cos A=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$$

를 만족시킬 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

(단, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$이고 $a\neq b$이다.)

① $A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

② $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

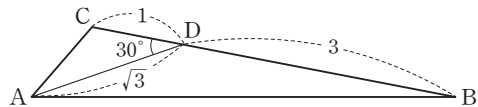
③ $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

④ $a=c$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

29

▸ 21054-0059

그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=1$, $\overline{BD}=3$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\angle ADC=30^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

유형 9 삼각형의 넓이

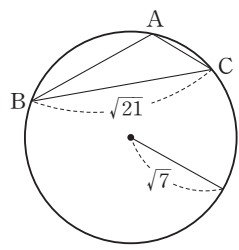
출제유형 | 삼각함수의 성질, 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$일 때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{BC}=\sqrt{21}$, $\overline{AB}=2\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $A>90°$)

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{21}}{\sin A}=2\times\sqrt{7}$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$A>90°$이므로 $A=120°$

$\overline{AB}=2x$, $\overline{AC}=x$ $(x>0)$으로 놓으면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{21})^2=(2x)^2+x^2-2\times2x\times x\times\cos120°$

$21=7x^2$, $x^2=3$ …… ㉡

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2x\times x\times\sin A=x^2\sin A$

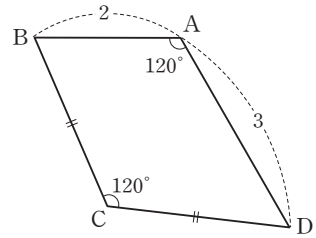
㉠, ㉡에서

$x^2\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ③

30

▸ 21054-0060

그림과 같이 사각형 ABCD에서 $A=C=120°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$이고 $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

31

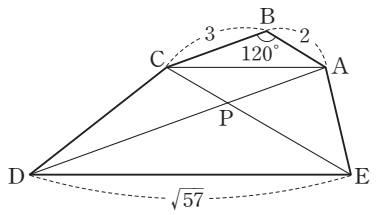
▸ 21054-0061

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $C=135°$, $\overline{AB}=2\sqrt{26}$이고 $\overline{BC}+\overline{AC}=8+2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{15}{2}$ ② 8 ③ $\frac{17}{2}$
④ 9 ⑤ $\frac{19}{2}$

32

▸ 21054-0062

그림과 같이 오각형 ABCDE에서 $\overline{AB}/\!/\overline{EC}$, $\overline{BC}/\!/\overline{AD}$, $\overline{AC}/\!/\overline{ED}$, $\angle ABC=120°$이고 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{DE}=\sqrt{57}$이다. 두 대각선 AD와 CE가 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PDE의 넓이는?

① $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

03 수열

1 등차수열

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d \text{ (단, } n=1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 $b-a=c-b$이므로 $b=\frac{a+c}{2}$

참고 일반항 a_n이 n에 대한 일차식 $a_n=An+B$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 A인 등차수열이다.

2 등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

참고 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 대한 이차식 $S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수, $n=1, 2, 3, \cdots$)인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $A+B$, 공차가 $2A$인 등차수열이다.

3 등비수열

(1) 첫째항이 a, 공비가 r ($r\neq0$)인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1} \text{ (단, } n=1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$

4 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r ($r\neq0$)인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r=1$일 때, $S_n=na$

(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$a_1=S_1, \; a_n=S_n-S_{n-1} \text{ (단, } n=2, 3, 4, \cdots)$$

6 합의 기호 $\sum$의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

제n항까지 / 일반항 / 첫째항부터

7 합의 기호 $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

8 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$

9 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어져 있을 때, 두 개의 분수로 분해하는 방법, 즉

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$를 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq 0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합으로 나타내어져 있을 때, 분모를 유리화하는 방법을 이용하여 계산한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq 0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

10 수열의 귀납적 정의

처음 몇 개의 항의 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.
예를 들면 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$a_2=2a_1=2\times1=2$, $a_3=2a_2=2\times2=4$, $a_4=2a_3=2\times4=8$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 8, $\cdots$이다.

11 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.
이와 같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

유형 1 등차수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등차수열의 일반항을 이용하여 공차 또는 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구한 후 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=a+(n-1)d$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) 두 자연수 m, n에 대하여
$a_m-a_n=(m-n)d$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_{10}-a_7=6$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

출제 의도

등차수열의 일반항을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=(a_1+9d)-(a_1+6d)$
$=3d$

이므로 $3d=6$, $d=2$

$a_4=a_1+3d$
$=4+3\times2$
$=4+6$
$=10$

답 ①

01

▸ 21054-0063

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1a_9=-60$, $a_4a_6=0$

일 때, a_3a_7의 값은?

① -18 ② -16 ③ -14
④ -12 ⑤ -10

02

▸ 21054-0064

2 이상의 자연수 n에 대하여 집합

$\{x\,|\,x$는 n 이하의 자연수$\}$

의 서로 다른 두 원소를 더하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 A_n이라 하고 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $A_3=\{3, 4, 5\}$이므로 $a_3=3$이다. $a_n=99$를 만족시키는 n의 값은?

① 50 ② 51 ③ 52
④ 53 ⑤ 54

03

▸ 21054-0065

자연수 d에 대하여 모든 항이 정수이고, 공차가 $2d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $|a_4|>|a_5|$를 만족시킬 때, a_4a_5가 최솟값을 갖도록 하는 a_1의 값을 $f(d)$라 하자. $f(2)+f(3)$의 값은?

① -31 ② -33 ③ -35
④ -37 ⑤ -39

유형 2 등차수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 첫째항, 공차, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공차를 구하고 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9,\ \sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{9}{2}$$

를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ −1 ⑤ −2

출제 의도

등차수열의 일반항과 합을 이용하여 등차수열의 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5+a_{13}=3a_9$에서

$(a+4d)+(a+12d)=3(a+8d)$

$a+8d=0$ ...... ㉠

또 $\sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{18}{2}\times(a_1+a_{18})=9(2a+17d)$이므로

$9(2a+17d)=\frac{9}{2}$에서

$2a+17d=\frac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ d=\frac{1}{2}$이므로

$a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

답 ①

04
▸ 21054-0066

두 수 $\log_3\frac{1}{2}$과 $\log_3 18$ 사이에 10개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$을 넣어 만든 수열이 등차수열일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

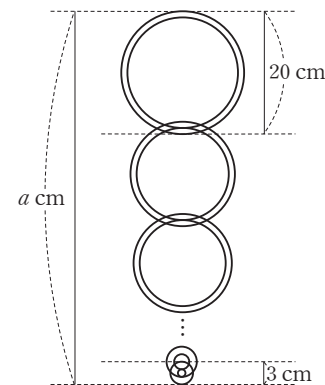
① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

05
▸ 21054-0067

자연수 n에 대하여 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $n=2$일 때, $a_2=27$이다. $\log_3 a_{50}$의 값은?

① 95 ② 97 ③ 99
④ 101 ⑤ 103

06
▸ 21054-0068

그림과 같이 폭이 1 cm인 원형의 고리들이 연결되어 하나의 못에 걸려 있다. 가장 위에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 20 cm이고 각각의 고리는 바로 위의 고리보다 바깥 지름의 길이가 1 cm씩 작으며 가장 아래에 위치한 고리의 바깥 지름의 길이는 3 cm이다. 이때 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는 a cm이다. 상수 a의 값은?

① 171 ② 173 ③ 175
④ 177 ⑤ 179

유형 3 등비수열의 뜻과 일반항

출제유형 | 등비수열의 일반항을 이용하여 공비나 특정한 항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n=ar^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) 두 자연수 m, n에 대하여
$\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$ (단, $a_n \neq 0$, $r \neq 0$)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{1}{4}$$

일 때, $a_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도

등비수열의 일반항을 이용하여 특정한 항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_3}{a_2}=r$, $\frac{a_6}{a_4}=r^2$이므로

$r-r^2=\frac{1}{4}$, $4r-4r^2=1$, $4r^2-4r+1=0$, $(2r-1)^2=0$

즉, $r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_5=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$이므로

$p+q=16+3=19$

답 19

07

▸ 21054-0069

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_3=-\frac{5}{2},\ a_2a_4=4$$

일 때, a_7의 값은?

① -8 ② -16 ③ -32
④ -64 ⑤ -128

08

▸ 21054-0070

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\log_2 a_n$으로 정의하자. 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, b_{15}의 값은?

(가) $b_3+b_5+b_7=15$
(나) $b_4+b_6+b_8=21$

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

09

▸ 21054-0071

첫째항이 $\frac{1}{64}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n>128$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

유형 4 등비수열의 합

출제유형 | 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 합을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 첫째항, 공비, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건에서 첫째항과 공비를 구하고 등비수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.
첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음을 이용한다.
(1) $r=1$일 때, $S_n=na$
(2) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=1,\ \frac{S_6}{S_3}=2a_4-7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.
(i) $r=1$이면 $a_n=1$이므로
$S_3=3\times1=3$, $S_6=6\times1=6$에서
$\frac{S_6}{S_3}=2$
$2a_4-7=2\times1-7=-5$
따라서 $\frac{S_6}{S_3}\neq2a_4-7$
(ii) $r\neq1$이면 $a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$
이때

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^3-1}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^3-1}=\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}$$

$=r^3+1$ …… ㉠
또
$2a_4-7=2r^3-7$ …… ㉡
㉠과 ㉡이 같아야 하므로
$r^3+1=2r^3-7$
$r^3=8$
r가 실수이므로 $r=2$
(i), (ii)에서 $a_n=2^{n-1}$이므로
$a_7=2^6=64$

답 64

10

▸ 21054-0072

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=3,\ \frac{3a_3}{a_2}+\frac{a_6}{a_4}=10$$

일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$의 값은?

① 376 ② 381 ③ 386 ④ 391 ⑤ 396

11

▸ 21054-0073

함수 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+\sqrt{2}$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, $g(0)$의 값은?

① $58+30\sqrt{2}$ ② $60+31\sqrt{2}$ ③ $62+32\sqrt{2}$ ④ $64+33\sqrt{2}$ ⑤ $66+34\sqrt{2}$

12

▸ 21054-0074

첫째항이 1이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 k는 다음 조건을 만족시킨다. 이때 $r+k$의 값은?

(가) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$
(나) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

유형 5 등차중항과 등비중항

출제유형 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 3개 이상의 수가 등차수열 또는 등비수열을 이루는 조건이 주어진 문제에서는 등차중항 또는 등비중항의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$2b=a+c$

가 성립한다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면

$b^2=ac$

가 성립한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$x^2-nx+4(n-4)=0$

이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

출제 의도

등차중항의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x^2-nx+4(n-4)=0$에서 $(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ ⋯⋯ ㉠

(ⅰ) $\alpha=4$, $\beta=n-4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$에서 $n>8$

㉠에서 $8=(n-4)+1$

즉, $n=11$

(ⅱ) $\alpha=n-4$, $\beta=4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$에서 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1$

즉, $n=\frac{13}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

답 ③

13 ▸ 21054-0075

두 양수 a, b에 대하여 세 수 16, 16^a, 32^b이 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log 5$, $\log 2a$, $\log b$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $a+b$의 값은?

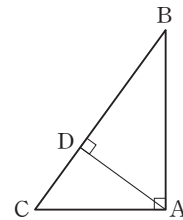
① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{11}{5}$
④ $\frac{13}{5}$ ⑤ 3

14 ▸ 21054-0076

두 자연수 a, b $(a>b)$에 대하여 세 수 a, b, $a-b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a^2, 12, $(a-b)^2$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

15 ▸ 21054-0077

그림과 같이 ∠A가 직각인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\sin C$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형 6 수열의 합과 일반항 사이의 관계

출제유형 | 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하거나 일반항을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

를 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\begin{aligned}S_6-S_2&=a_3+a_4+a_5+a_6\\&=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5\\&=7r^2(1+r+r^2+r^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_9-S_5&=a_6+a_7+a_8+a_9\\&=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8\\&=7r^5(1+r+r^2+r^3)\end{aligned}$$

이때

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=\frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=r^3$$

이므로

$r^3=3$

따라서 $a_7=7r^6=7\times(r^3)^2=7\times3^2=63$

답 63

16

▶ 21054-0078

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=n+2$$

를 만족시킬 때, a_6의 값은?

① 125 ② 128 ③ 131 ④ 134 ⑤ 137

17

▶ 21054-0079

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1+a_4=14$이고 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=2n^2+k$를 만족시키는 상수 k가 존재한다. k의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

18

▶ 21054-0080

수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=na_n$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_1+a_{2021}의 값은?

① 2021 ② 2022 ③ 2023 ④ 2024 ⑤ 2025

수학 I

유형 7 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질

출제유형 | 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 수열의 합을 구하거나 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열 $\{a_n\}$에서 합의 기호 $\sum$가 포함된 문제는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) $\sum$의 뜻

① $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$ (단, $2\le m\le n$)

(2) $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28,\ \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18$ ...... ㉠

또 $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$ ...... ㉡

㉡$\times 2-$㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$

답 14

19

▸ 21054-0081

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=3a_n+b_n+8$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 40이고 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 60일 때, 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하시오.

20

▸ 21054-0082

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{16}=\frac{1}{3},\ \sum_{k=1}^{15}k(a_k-a_{k+1})=100$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15}a_k$의 값은?

① 101 ② 103 ③ 105
④ 107 ⑤ 109

21

▸ 21054-0083

다음 조건을 만족시키는 두 정수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

> 임의의 두 자연수 m, n $(m<n)$에 대하여 m과 n 사이에 있는 유리수 중 분모가 8인 모든 기약분수의 합은 am^2+bn^2이다.

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

유형 8 자연수의 거듭제곱의 합

출제유형 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

필수 유형

수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k(n+1-k)$$

일 때, a_8의 값은?

① 240 ② 250 ③ 260
④ 270 ⑤ 280

출제 의도

자연수의 거듭제곱의 합을 나타내는 $\sum$의 공식을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$a_8=\sum_{k=1}^{8} 2k(8+1-k)$$
$$=\sum_{k=1}^{8} (18k-2k^2)$$
$$=18\times\frac{8\times9}{2}-2\times\frac{8\times9\times17}{6}$$
$$=648-408=240$$

답 ①

[다른 풀이]

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} 2k(n+1-k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n} \{(n+1)k-k^2\}$$
$$=2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$=2(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{3}\{3(n+1)-(2n+1)\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

따라서

$$a_8=\frac{8\times9\times10}{3}=240$$

22

▸ 21054-0084

$\sum_{k=1}^{22} |10-k|+\sum_{k=1}^{22} (k-10)$의 값은?

① 144 ② 148 ③ 152
④ 156 ⑤ 160

23

▸ 21054-0085

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(-1)^{n+1}n^2$이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} S_{2k}$의 값은?

① -201 ② -203 ③ -205
④ -207 ⑤ -209

24

▸ 21054-0086

삼차방정식 $x^3+x^2-6x+4=0$의 세 근 중 무리수인 것을 α, β라 할 때,

$$(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)$$

의 값은?

① 435 ② 445 ③ 455
④ 465 ⑤ 475

수학 I

유형 9 여러 가지 수열의 합

출제유형 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수열의 일반항을 소거되는 꼴로 변형할 때에는 다음을 이용하여 해결한다.

(1) 일반항이 분수 꼴이고 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right)$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) 일반항의 분모가 근호가 있는 두 식의 합이면 다음과 같이 변형하여 문제를 해결한다.

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k})$ (단, $a\neq0$)

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$ (단, $a\neq b$)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오.

[4점]

출제 의도

합의 기호 $\sum$를 포함하고 있는 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$에서

$(x-n)(x-n+1)=0$

$x=n$ 또는 $x=n-1$

즉, $\alpha_n=n$, $\beta_n=n-1$ 또는 $\alpha_n=n-1$, $\beta_n=n$

$$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{81}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$=(\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$$

$$=\sqrt{81}-0=9$$

답 9

25 ▸ 21054-0087

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=5$이고 $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\frac{1}{6}$일 때, S_{11}의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\neq0$이다.)

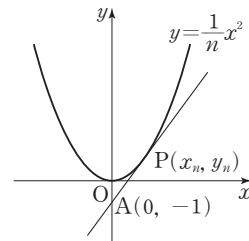
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

26 ▸ 21054-0088

공차가 2이고 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}=\frac{1}{18}$일 때, a_{20}의 값은?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

27 ▸ 21054-0089

그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 A$(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 기울기가 양수인 접선의 접점을 P(x_n, y_n)이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15}\frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

유형 10 수열의 귀납적 정의

출제유형 | 주어진 항의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 첫째항 a_1의 값과 이웃하는 몇 개의 항들 사이에 성립하는 관계식에서 n 대신에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$에서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때

(1) 등차수열

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇨ 공차가 d인 등차수열

② $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 또는 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

(2) 등비수열

① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) ⇨ 공비가 r인 등비수열 (단, $a_n\neq0$)

② $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 또는 $(a_{n+1})^2=a_n\times a_{n+2}$ (단, $a_na_{n+1}\neq0$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$a_1=1$이므로

$a_4=a_1+1=2$

$a_4=2$이므로

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

28

▸ 21054-0090

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=6$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (a_n\geq0) \\ a_n+9 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{50}a_k$의 값은?

① 79 ② 81 ③ 83
④ 85 ⑤ 87

29

▸ 21054-0091

$a_1=b_1=2$인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=2a_n$, $b_{n+1}=b_n+2$

를 만족시킨다. 부등식 $\frac{a_n}{2^{b_n}}>\frac{1}{1024}$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

30

▸ 21054-0092

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2\neq5$, $a_7=a_8=8$이고 다음 조건을 만족시키는 자연수 p가 존재한다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=p$이다.

$\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

수학 I

유형 11 다양한 수열의 규칙 찾기

출제유형 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 나열하여 수열의 규칙을 찾는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건을 만족시키는 몇 개의 항을 구하여 규칙을 찾아 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

출제 의도

주어진 조건에 따라 나열되는 수의 규칙을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$a_1=9$, $a_2=3$이고

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_3=a_2-a_1=-6$

$n=2$일 때, $a_4=a_3-a_2=-9$

$n=3$일 때, $a_5=a_4-a_3=-3$

$n=4$일 때, $a_6=a_5-a_4=6$

$n=5$일 때, $a_7=a_6-a_5=9$

$n=6$일 때, $a_8=a_7-a_6=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

이때 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$이므로

구하는 100 이하의 자연수 k의 개수는

$16\times2+1=33$

답 33

31

▸ 21054-0093

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을

$$f(n)=\begin{cases} n^2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ -n^2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

라 하고 $a_n=f(n)+f(n+1)$이라 하자. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{50} a_k$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

32

▸ 21054-0094

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{40}=25$이고 $S_{65}=19$이다. a_1+a_2의 값은?

① -5 ② -7 ③ -9 ④ -11 ⑤ -13

33

▸ 21054-0095

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(12, 6)$이다.

(나) 점 A_n이 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점일 때, 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 만나는 점을 B_n이라 한다.

(다) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{x}{2}$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표와 y좌표의 합을 a_n이라 하자. $a_7+a_8=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 12 수학적 귀납법

출제유형 | 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 명제를 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 앞뒤 관계를 파악하여 빈칸에 알맞은 식이나 수를 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times2^{n(n-1)}+(n-1)\times2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n} \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$$
> 이다. $n=m+1$일 때,
> $$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{(가)}+m\times2^{-m-1}$$
> $$=\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}$$
> $$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$$
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

출제 의도

수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 과정에서 빈칸에 들어갈 알맞은 식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}$$
$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$$

답 ④

34

▸ 21054-0096

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{n(2n^2+1)}{3} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때, (좌변)$=6$, (우변)$=6$이므로 $(*)$이 성립한다.
> (ii) $n=m\ (m\ge2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
> $$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2=\frac{m(2m^2+1)}{3}$$
> 이다.
> 위 등식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하여 정리하면
> $$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+\boxed{(가)}+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
> $$=\frac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{(가)}$$
> $$=\frac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{(나)}$$
> $$=\frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(3)+g(4)$의 값을 구하시오.

04 함수의 극한과 연속

1 함수의 수렴과 발산

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \alpha$

(2) ① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to \infty} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \alpha$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to \alpha$

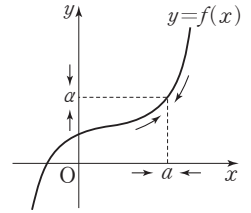
(3) ① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x)=\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$

③ 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

2 함수의 좌극한과 우극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a-} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to a-$일 때 $f(x) \to \alpha$

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x \to a+} f(x)=\beta$ 또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to \beta$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 좌극한 $\lim_{x \to a-} f(x)$와 우극한 $\lim_{x \to a+} f(x)$가 모두 존재하고, 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. 또한 그 역도 성립한다. 즉 $\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=p \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=p$ (단, p는 실수)

3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} \{kf(x)\}=k\lim_{x \to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

4 미정계수의 결정

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=p$ (p는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=p$ ($p\neq0$인 실수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

5 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

6 함수의 연속과 불연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라 한다. 즉, 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)의 모든 실수에 대하여 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속 또는 연속함수라고 한다.

한편, 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-}f(x)=f(b)$

7 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq0$)

8 최대 · 최소 정리

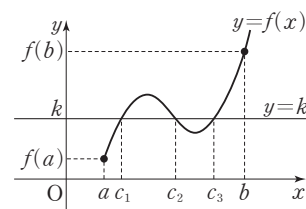
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

참고 함수 $f(x)$가 연속이 아니면 닫힌구간에서도 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

9 사잇값의 정리

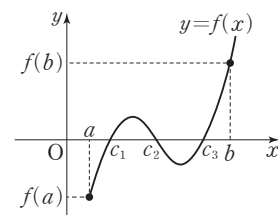
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

특히, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면

$$f(c)=0$$

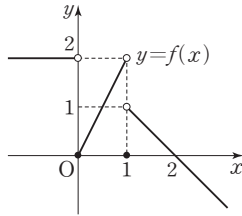
인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

유형 1 함수의 극한값

출제유형 | 함수의 식과 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정의역의 범위에 따라 다르게 정의된 함수 또는 그래프에서 좌극한과 우극한, 극한값을 구하는 과정을 이해하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \to 0+} f(x) - \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

출제 의도

그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 그래프에서

$\lim_{x \to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=2$

이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) - \lim_{x \to 1-} f(x)=0-2=-2$

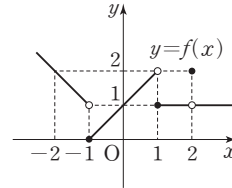
답 ①

01

▸ 21054-0097

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) + kf(2)$$

이다. 실수 k의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

02

▸ 21054-0098

$x>-7$에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x+7} & (-7<x<1) \\ x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 극한값 $\lim_{x \to 1} f(x)$가 존재하고 $\lim_{x \to b+} f(x)=\infty$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

03

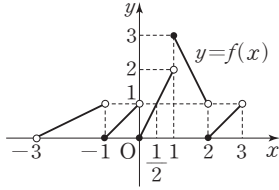
▸ 21054-0099

함수 $f(x)=\frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)}$에 대하여 $\lim_{x \to 3+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)=10$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04

▸ 21054-0100

집합 $X=\{x|-3<x<3$인 실수$\}$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

세 집합

$$A=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)-1,\ a\in X\},$$
$$B=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)>\lim_{x\to a-}f(x),\ a\in X\},$$
$$C=\{a|\lim_{x\to a+}f(x)<\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2,\ a\in X\}$$

에 대하여 집합 $C-(A\cup B)$는?

① $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}$

② $\{x|0<x<1\}\cup\left\{x\middle|1<x<\frac{3}{2}\right\}$

③ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$

④ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\left\{x\middle|1<x<\frac{5}{2}\right\}$

⑤ $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\right\}$

05

▸ 21054-0101

실수 전체의 집합에서 정의되어 있는 함수 $f(x)$가 임의의 정수 a에 대하여 $a-1\le x<a$일 때,

$f(x)=ax$

이다. $\lim_{x\to(p+2)-}f(x)-\lim_{x\to p+}f(x)=157$일 때, 정수 p의 값은?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

유형 2 함수의 극한에 대한 성질

출제유형 | 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수의 합, 차, 곱, 몫의 극한값을 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형

| 2018학년도 대수능 |

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$이므로

$g(x)=(x+1)f(x)$로 놓으면

$\lim_{x\to1}g(x)=1$

$x\ne-1$일 때, $f(x)=\frac{g(x)}{x+1}$이므로

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\left\{(2x^2+1)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

따라서 $20a=20\times\frac{3}{2}=30$

답 30

수학 II

06

▸ 21054-0102

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1} f(x)=4,\ \lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x}=k$$

일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-(x+2)g(x)}{f(x)g(x)+2g(x)}=\frac{1}{3}$이다. 상수 k의 값은?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{17}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$
④ $\frac{19}{5}$ ⑤ 4

07

▸ 21054-0103

최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축 위의 한 점 $(a,\ 0)$ ($a\neq 2$인 상수)에서만 만난다.

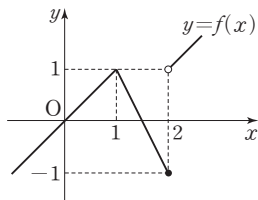
$$\lim_{x\to 2} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1}\{f(x)+2g(x)\}=0,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{3}$$

일 때, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

08

▸ 21054-0104

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1} f(x+1)g(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)g(x+1)$의 값이 모두 존재할 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

유형 3 $\frac{0}{0}$ 꼴과 $0\times\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 분모, 분자를 각각 인수분해하여 약분하고 무리식은 분모 또는 분자를 유리화하여 약분하여 해결한다.

(2) $0\times\infty$ 꼴의 극한값은 분수 꼴의 식은 통분하여 인수분해하고 무리식은 유리화하여 해결한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}$의 값은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

출제 의도

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2+5)$$
$$=(-2)^2+5=9$$

답 ③

09

▸ 21054-0105

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2}$의 값은?

① 32　② 34　③ 36
④ 38　⑤ 40

10

▸ 21054-0106

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3+x}-\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

11

▸ 21054-0107

두 함수 $f(x)=\frac{1}{x+a}$, $g(x)=\sqrt{x+b}-1$에 대하여

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 5}f(x)g(x)=\frac{1}{3}$$

이다. $\lim_{x\to 2}f(x)g(x)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ 0
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

유형 4 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값의 계산

출제유형 | $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값을 구하는 문제와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 해결하고 $\infty-\infty$ 꼴의 무리식의 극한값은 분모 또는 분자의 무리식을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 해결한다.

필수 유형

| 2019학년도 대수능 |

상수항과 계수가 모두 정수인 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

출제 의도

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이고 조건 (나)에서 다항함수 $f(x)g(x)$는 x^2을 인수로 가져야 하므로

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

$f(x)=2x^2$

이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=2\times 2^2=8$

답 ③

12

▸ 21054-0108

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-x^3-x)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13

▸ 21054-0109

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 부등식

$$\frac{5}{x^2+10}\le x^2f(x)\le\frac{5}{x^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}(2x^4+5)f(x)$의 값을 구하시오.

14

▸ 21054-0110

함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{200}x^k$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3n^2}(x^{4n}+x^{3n})}{f(x)}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

유형 5 미정계수의 결정

출제유형 | 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때, 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=p$ (p는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

② $p\ne0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

출제 의도

극한의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)$$
$$=1-a+b=2$$

이므로 $b=a+1$

이때 $f(1)=2(1+a+b)=2(2a+2)=4(a+1)\le12$, $a\le2$

따라서

$f(2)=3(4+2a+b)=3(3a+5)\le3(3\times2+5)=33$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.)

이므로 $f(2)$의 최댓값은 33이다.

답 ③

15

▸ 21054-0111

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+ax^2-3x}{(x-3)(x+b)}=12$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

16

▸ 21054-0112

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2ax+a+b}=-\frac{1}{2}$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

17

▸ 21054-0113

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b}-2}=16$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

18

▸ 21054-0114

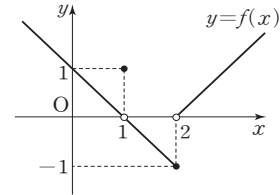
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)f(x)}{x+2}=0$일 때, $f(3)$의 값은?

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

19

▸ 21054-0115

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$와 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$의 값이 모두 존재할 때, $g(6)$의 값을 구하시오.

20

▸ 21054-0116

최고차항의 계수가 소수인 자연수 a인 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수일 때, $a+f(5)$의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

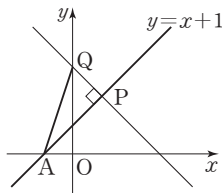
수학 Ⅱ

유형 6 함수의 극한의 활용

출제유형 | 좌표평면에서의 여러 도형의 선분의 길이, 도형의 넓이에 대한 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 도형에서 구하는 극한값에 관련된 선분의 길이, 도형의 넓이를 한 문자에 대한 식으로 나타내어 극한값을 구한다.

필수 유형 | 2012학년도 대수능 |

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

출제 의도

그래프에서 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

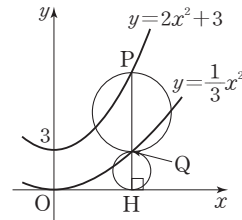
직선 $y=x+1$과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로
점 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은
$y-(t+1)=-(x-t)$, 즉 $y=-x+2t+1$
이때 직선 PQ가 y축과 만나는 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는
$(0,\ 2t+1)$
따라서
$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$,
$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$
이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}=2$$

답 ③

21

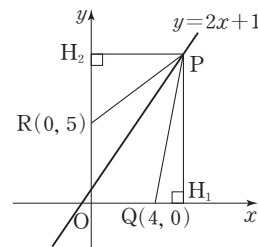
▸ 21054-0117

그림과 같이 곡선 $y=2x^2+3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+3)$에서 x축에 내린 수선이 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$과 만나는 점을 Q, x축과 만나는 점을 H라 하자. 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $A(t)$, 선분 QH를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이를 $B(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}$의 값은? (단, $t>0$)

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

22

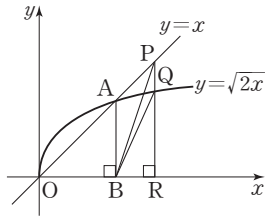
▸ 21054-0118

좌표평면에 직선 $y=2x+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2t+1)$과 두 점 $\mathrm{Q}(4,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 5)$가 있다. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때, 삼각형 PQH_1과 삼각형 $\mathrm{PH}_2\mathrm{R}$의 넓이를 각각 $A(t)$, $B(t)$라 하자.

$\lim_{t\to4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}$의 값은? (단, $t>4$)

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

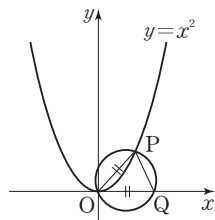
23

▸ 21054-0119

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x$가 만나는 원점이 아닌 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 $y=x$ 위의 점 $P(t,\ t)\ (t>2)$에 대하여 점 P를 지나고, x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$, x축과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, $\lim_{t\to 2+}\frac{\overline{PB}-\overline{QB}}{\overline{BR}\times\overline{OR}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

24

▸ 21054-0120

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(t,\ t^2)\ (t>0)$에 대하여 $\overline{OP}=\overline{OQ}$가 되도록 점 Q를 x축의 양의 방향에 잡는다. 삼각형 POQ의 외접원의 지름의 길이를 $A(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\{A(t)\}^2}{t^4}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

유형 7 함수의 연속

출제유형 | 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 조건을 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq 3)\\ b & (x=3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

출제 의도

함수가 연속이 될 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이어야 한다.
$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$을 만족시키면 된다.
즉, $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+a}{x-3}=b$가 성립해야 하고 $x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+a)=9-15+a=0$에서 $a=6$

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=1$$

따라서 $a+b=6+1=7$

답 ④

25

▸ 21054-0121

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

26

▸ 21054-0122

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x)=x^2+4x-5+2g(x)$$

를 만족시킨다. $f(1)=-6$일 때, $f(10)$의 값은?

① 17　② 18　③ 19
④ 20　⑤ 21

27

▸ 21054-0123

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

28

▸ 21054-0124

함수

$$f(x)=\begin{cases} \left|-\dfrac{2}{x}-2\right| & (x<-1) \\ -x^2+k_1 & (-1\leq x<1) \\ \left|\dfrac{2}{x}+k_2\right| & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(a)$라 할 때, 함수 $g(a)$는 $a=t$에서 불연속이다.

모든 실수 t의 값의 합은? (단, k_1, k_2, a는 실수이다.)

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

29

▸ 21054-0125

자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<0) \\ \dfrac{3}{8}\left(b-\dfrac{3}{4}n\right)x & \left(0\leq x<\dfrac{8}{3}\right) \\ 3x-8 & \left(x\geq \dfrac{8}{3}\right) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 p, 모든 실수 b의 값의 합을 q라 할 때, $q-p$의 값은?

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 두 실수 a, b에 대하여 $0<a+b<10$이다.

① $\frac{221}{4}$　② $\frac{111}{2}$　③ $\frac{223}{4}$
④ 56　⑤ $\frac{225}{4}$

유형 8 연속함수의 성질

출제유형 | 연속함수의 합, 차, 곱, 몫의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $cf(x)$ (단, c는 상수) ② $f(x)\pm g(x)$

③ $f(x)g(x)$ ④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

필수 유형 | 2017학년도 대수능 |

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases},$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

출제 의도

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq 2$일 때, $f(x)=1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다. 즉,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2$, $2a=-1$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$

답 ④

30

▸ 21054-0126

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=2$에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)>0$, $g(2)=1$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-g(x)}{x^2+2f(x)+g(x)}=3$

$f(2)+\displaystyle\lim_{x\to 2}g(x)$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

31

▸ 21054-0127

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & (x\leq -1,\ x\geq 1) \\ x+b & (-1<x<1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x+1$$

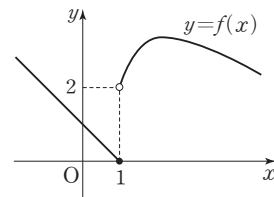
에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $3a+2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

32

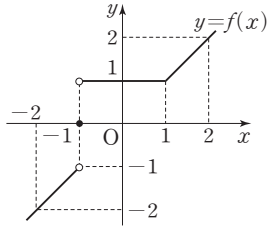
▸ 21054-0128

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)=(x^2+a)f(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위한 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

33

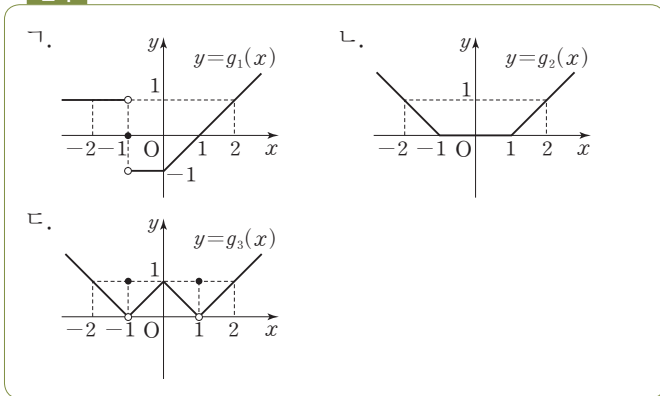
▸ 21054-0129

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

보기에 주어진 세 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ 중 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ.

ㄴ.

ㄷ.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34

▸ 21054-0130

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x<1) \\ x^2+ax+4 & (x\geq 1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x+2a & (x<1) \\ -x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{9}{2}$ ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

35

▸ 21054-0131

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키는 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (-1\leq x<0) \\ x^2+3 & (0\leq x<1) \end{cases}$$

과 $g(x)=f(x)+(k+1)f(x+1)$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

(가) $f(-1)>0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

36

▸ 21054-0132

실수 a에 대하여 이차함수 $y=3x^2-2ax+a$의 그래프와 x축의 교점의 개수를 $f(a)$라 할 때, a에 대한 함수 $g(a)$에 대하여 다음 명제가 성립한다.

함수 $\dfrac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속이면
함수 $f(a)\left\{\dfrac{1}{2}g(a)-8\right\}$이 $a=3$에서 연속이다.

함수 $\dfrac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속일 때, $g(3)$의 값을 구하시오.

유형 9 최대, 최소 정리와 사잇값의 정리

출제유형 | 최대, 최소 정리 또는 사잇값의 정리를 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
(1) 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
(2) $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

필수 유형

사차함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

> 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 양의 근 1개와 음의 근 1개를 갖는다.

출제 의도

사잇값의 정리를 이용하여 함수의 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f'(x)=4x^3-20x=4x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
열린구간 $(-\sqrt{5}, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
함수 $f(x)=x^4-10x^2+a$에서 $f(0)>0$이므로 $f(-2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 0)$에서 음의 근 1개를 갖는다.
$f(-2)f(0)=a(a-24)<0$에서
$0<a<24$ …… ㉠
또한 열린구간 $(0, \sqrt{5})$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. $f(0)>0$이고 $f(2)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 양의 근 1개를 갖는다.
$f(2)f(0)=a(a-24)<0$에서
$0<a<24$ …… ㉡
㉠과 ㉡에서 $0<a<24$
따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 23이다.

답 23

37

▶ 21054-0133

삼차방정식 $x^3+ax+1=0$이 세 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 실근을 가지도록 하는 정수 a의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

38

▶ 21054-0134

$-12\le x\le 12$에서 정의되고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-2\le x\le 2$에서 $f(x)=3$과 $f(x)=-3$을 만족시키는 x의 값은 각각 오직 한 개씩 있다.
> (나) $-12\le x\le 8$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(-2)=f(2)$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 적어도 12이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

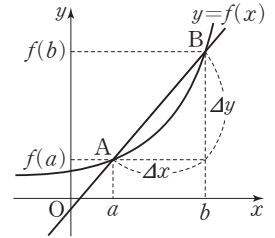
수학 Ⅱ

05 다항함수의 미분법

1 평균변화율

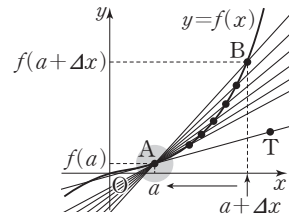
(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

(2) 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

2 미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

참고 (1) $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$에서 Δx 대신에 h를 이용하여 간단히 나타낼 수 있다. 즉,

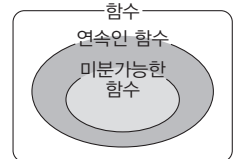
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(2) $\Delta x\to 0$일 때 점 B의 x좌표가 a에 한없이 가까워지므로 점 B는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 A에 한없이 가까워진다. 이때 직선 AB는 점 A를 지나는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워지는데 이 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고, 점 A는 접점이라고 한다.

3 미분가능성과 연속성

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$를 미분가능한 함수라고 한다.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 위 명제의 역인 '함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.'는 반드시 성립하는 것은 아니다.

참고 미분계수 $f'(a)$가 존재한다는 뜻은 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이므로 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것이고, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재한다는 것은 좌극한값 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 우극한값 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 모두 존재하고 서로 같아야 한다는 뜻이다.

4 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 각각의 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) 함수 $y=f(x)$에서 그 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $y=f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

5 미분법의 공식

(1) 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)와 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ ($n\geq 2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$ ② $y=x$이면 $y'=1$ ③ $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) 함수의 실수배, 합, 차의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수) ② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ ③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

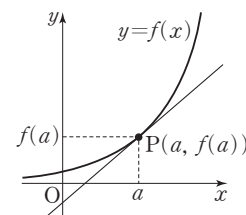
(3) 함수의 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

6 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

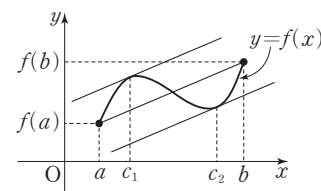
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

7 평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

8 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소: 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 한다.

(2) 함수의 증가와 감소의 판정: 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

참고 위의 명제의 역이 반드시 성립하는 것은 아니다. 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

9 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소: 함수 $f(x)$에서

① $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

② $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

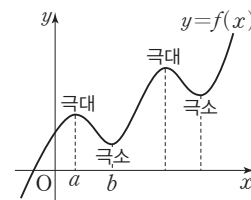
이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

10 함수의 그래프

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

① 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.

② $f'(x)$의 부호 변화를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구한다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 좌표축과의 교점의 좌표 등을 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

11 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 가지므로 다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾는다.

① 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.

② 닫힌구간 $[a, b]$에서의 양 끝의 함숫값 $f(a)$와 $f(b)$를 구한다.

③ ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 따라 적당한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 구한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

12 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표이다.

(3) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

참고 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 다음과 같다.

① (극댓값)$\times$(극솟값)>0이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

② (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

③ (극댓값)$\times$(극솟값)<0이면 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

13 부등식에의 활용

(1) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하는 것을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

14 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

(1) $v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) $a=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$

05 다항함수의 미분법

유형 1 미분계수의 정의

출제유형 | 주어진 극한값의 식을 변형하여 미분계수를 구하거나 미분계수의 기하적 의미가 접선의 기울기임을 이해하여 미분계수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 미분계수의 정의를 여러 가지 방식으로 변형할 수 있어야 하고 미분계수가 곡선에 접하는 접선의 기울기임을 이해하고 활용할 줄 알아야 한다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\ (\text{단, } k\text{는 0이 아닌 상수})$$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 p이면

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=p$$

필수 유형

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)=x^3f(x)-7$
> (나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

$f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

미분계수의 정의와 변형을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (나)에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

또한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

그러므로 $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$f(2)=g(2)$ ⋯⋯ ㉠

조건 (가)의 식에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$이고 ㉠에 의하여

$g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$

$f(2)=g(2)=1$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}=f'(2)-g'(2)=2$$

따라서 $f(2)+g(2)+f'(2)-g'(2)=1+1+2=4$

답 ④

01

▸ 21054-0135

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=3$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

02

▸ 21054-0136

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=2$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-5}{x^2-16}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

03

▸ 21054-0137

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to2}f(x)=4$
> (나) $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}=6$

$g'(2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

유형 2 미분가능과 연속

출제유형 | 함수가 특정한 x의 값에서 미분가능한지, 즉 미분계수가 존재하는지에 대하여 묻는 문제, 구간에 따라 주어진 함수가 다르고 미정계수를 포함한 함수가 미분가능함을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이면 미분계수 $f'(a)$가 존재하고, 미분가능하면 연속임을 이용한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \le -2) \\ 2x & (x > -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

미분가능하면 연속임을 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 미분가능하다.

또한 $x=-2$에서 미분가능하면 $x=-2$에서 연속이므로

$$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{x \to -2+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \to -2-} (x^2+ax+b) = 4-2a+b,\ \lim_{x \to -2+} 2x = -4$$

$f(-2)=4-2a+b$

에서 $4-2a+b=-4$, $b=2a-8$ …… ㉠

이때

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\{(-2+h)^2+a(-2+h)+(2a-8)\}+4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{h^2+(a-4)h}{h} = \lim_{h \to 0-} (h+a-4) = a-4$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{2(-2+h)+4}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{2h}{h} = 2$$

이므로 $a-4=2$에서 $a=6$

㉠에서 $b=4$이므로

$a+b=10$

답 ⑤

04

▸ 21054-0138

함수

$$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2(x-2) & (x<2) \\ x^2+ax+b & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

05

▸ 21054-0139

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x)+b & (x<2) \\ x^3+ax & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $a-b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06

▸ 21054-0140

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 $k>1$인 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 4 & (x \le 1) \\ f(x) & (1<x \le k) \\ c & (x>k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b+c-k$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① -14 ② -16 ③ -18
④ -20 ⑤ -22

유형 3 도함수와 미분법

출제유형 | 미분법을 이용하여 미분계수를 구하거나 조건을 만족시키는 함수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 도함수를 구하고 이 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있어야 하며 여러 변형된 식에서도 활용할 수 있어야 한다.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
(1) $y=x^n$ ($n\ge2$인 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$
(2) $y=x$이면 $y'=1$
(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$
(4) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)
(5) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
(6) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$
(7) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

평균변화율과 미분계수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$$
$$=a^2-3a+5$$

또 $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로
$f'(2)=12-12+5=5$
따라서 $a^2-3a+5=5$에서
$a(a-3)=0$
$a=0$ 또는 $a=3$
$a>0$이므로 $a=3$

답 3

07

▸ 21054-0141

함수 $f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

08

▸ 21054-0142

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+a^2x+b$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

09

▸ 21054-0143

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$
(나) $f'(-1)=8$, $g'(1)=-g'(3)=4$

$f(2)-g(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

수학 Ⅱ

유형 4 접선의 방정식

출제유형 | 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기와 미분계수가 같음을 이용하여 접점의 좌표, 접선의 기울기, 접선의 방정식을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)$임을 이해하고 이를 이용하여 여러 형태로 제시된 문제를 해결할 수 있어야 한다. 특히 접선의 방정식은 직선의 방정식임을 이해하고 여러 가지 도형의 성질을 함께 활용할 수 있어야 한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y=x^3-6x^2+6$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 점 $(0,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$y=x^3-6x^2+6$에서

$y'=3x^2-12x$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$3\times1^2-12\times1=-9$

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-9(x-1)$

$y=-9x+10$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=-9\times0+10=10$

답 10

10

▸ 21054-0144

곡선 $y=x^3+3x-1$ 위의 점 $(1,\ 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지날 때, a의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

11

▸ 21054-0145

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선이 점 $(3,\ f(3))$을 지날 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

12

▸ 21054-0146

두 함수 $f(x)=x^3+3x-2$, $g(x)=x^2+ax+b$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 일치할 때, $g(-1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5　② -6　③ -7　④ -8　⑤ -9

13

▸ 21054-0147

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$에서 곡선 $y=x^2+2x+2$에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(p,\ q)$를 지난다. $p+q$의 값은?

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{7}{4}$　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{11}{4}$

14

▸ 21054-0148

함수 $f(x)=x^3+3x$에 대하여 두 점 $A(0,\ f(0))$, $B(3,\ f(3))$을 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $C(c,\ f(c))\ (0<c<3)$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l이 곡선 $y=-x^2+6x+k$와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나고 $\overline{AB}=\overline{DE}$일 때, $k=p+q\sqrt{3}$이다. $p-q$의 값은?

(단, k는 상수이고, p, q는 유리수이다.)

① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ -1　⑤ $-\frac{5}{4}$

유형 5 함수의 증가와 감소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판단하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수가 증가하거나 감소할 조건을 구할 수 있어야 한다.

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

필수 유형 | 2016학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 증가와 감소를 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 열린구간 $(-a,\ a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

15
▸ 21054-0149

함수 $f(x)=x^3-12x^2+ax+1$이 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 42　② 44　③ 46　④ 48　⑤ 50

16
▸ 21054-0150

함수 $f(x)=x^3+kx^2+3$이 열린구간 $(1, 4)$에서 감소할 때, 실수 k의 최댓값은?

① -6　② -7　③ -8　④ -9　⑤ -10

17
▸ 21054-0151

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 최댓값은?

(가) $f(0)=f'(1)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq f'(1)$
(다) 열린구간 $(-1, 2)$에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}\leq 0$이다.

① -31　② -33　③ -35　④ -37　⑤ -39

유형 6 함수의 극대와 극소

출제유형 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극대, 극소를 판단하거나 함수의 극댓값, 극솟값을 구하는 다양한 형태의 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 조건이나 그래프 등을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있어야 한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
(2) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
　① 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
　② 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$이 $x=3$에서 극대일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

출제 의도

미분을 이용하여 함수가 극대일 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx+1$에서

$f'(x)=-x^2+4x+m$

이때 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $x=3$에서 극대이므로 $f'(3)=0$이다.

$f'(3)=-9+12+m=0$

따라서 $m=-3$

답 ①

18

▸ 21054-0152

함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x+a$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

19

▸ 21054-0153

함수 $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$의 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

20

▸ 21054-0154

함수 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-3a)x+1$이 극값을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21

▸ 21054-0155

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-f'(-x)$이다.
(나) $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가질 때 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(2,\ f(2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는? (단, $\alpha\neq2$, $\beta\neq2$)

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

22

▸ 21054-0156

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(가) $f(1)=f'(1)=0$
(나) 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이다.

보기

ㄱ. $f(0)>0$이면 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(2)$의 최댓값은 19이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 7 함수의 그래프와 최대, 최소

출제유형 | 다양하게 주어진 조건을 이용하여 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제와 도형의 길이, 넓이, 부피의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제 등이 출제된다.

출제유형잡기 | 그래프를 추론하고 닫힌구간에서 극댓값, 극솟값을 구하고 닫힌구간의 양 끝 값에서의 함숫값과 비교하여 최댓값과 최솟값을 구한다. 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값과 최솟값은 주어진 조건에 따라 미지수 x를 정하고 구하고자 하는 값을 x에 대한 함수 $f(x)$로 나타내어 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

필수 유형 | 2017학년도 대수능 6월 모의평가 |

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

함수의 그래프에서 극대와 극소를 활용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극소이면서 최소이다.

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\frac{a}{3}+2$

$=-\frac{5}{27}a^3+2$

$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$에서 $a^3=8$, $a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$에서

$f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2=10$

이므로 $M=10$

따라서 $a+M=2+10=12$

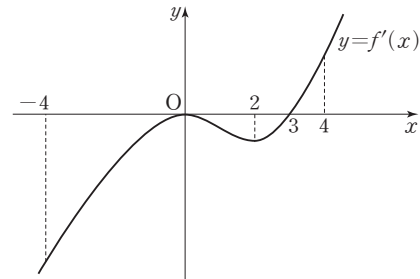
답 12

23 ▸ 21054-0157

닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=12$일 때, 상수 a의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

24 ▸ 21054-0158

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은?
(단, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=2$에서 극솟값을 가지며 $f'(3)=0$이다.)

① $f(-4)$ ② $f(0)$ ③ $f(2)$ ④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

25 ▸ 21054-0159

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2-1$이 닫힌구간 $[1, 4]$에서 최댓값 M, 최솟값 -5를 가질 때, M의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

26

▸ 21054-0160

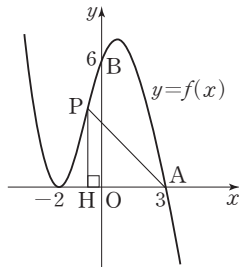
닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=8^x-3\times2^x+5$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

27

▸ 21054-0161

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=-2$에서 x축에 접하고, 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 6)$을 지난다.
점 $P(t, f(t))$ $(-2<t<3)$에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여 삼각형 APH의 넓이를 $S(t)$라 하자. $-2<t<3$에서 함수 $S(t)$의 최댓값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

28

▸ 21054-0162

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)=2x^3-ax$의 최솟값이 $-\frac{32}{27}$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

29

▸ 21054-0163

실수 a에 대하여 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수

$$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+16a^2$$

의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $g(1)=23$
ㄴ. 함수 $g(a)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄷ. 함수 $g(a)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학 Ⅱ

유형 8 방정식에의 활용

출제유형 | 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악하여 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 증가, 감소, 극대, 극소를 조사하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, x축, 직선 $y=k$와 만나는 점 등을 이용하여 방정식의 실근의 개수 등을 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

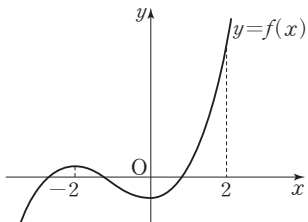
출제 의도

다항함수의 미분법을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면 $f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=-16+24+a=a+8$
$f(0)=a$
$f(2)=16+24+a=a+40$
이므로 $f(-2)<f(2)$
그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, $f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.

$f(-2)\ge 0$에서 $a+8\ge 0$, $a\ge -8$ ······ ㉠
$f(0)<0$에서 $a<0$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$
따라서 구하는 정수 a의 개수는 $0-(-8)=8$

답 ③

30

▸ 21054-0164

삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

31

▸ 21054-0165

삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x-k=0$의 세 실근 α, β, γ에 대하여 $\alpha<1<\beta<\gamma$일 때, 모든 정수 k의 개수는?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

32

▶ 21054-0166

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+9x-3$에 그을 수 있는 모든 접선의 개수를 $f(k)$라 할 때, 함수 $f(k)$는 $k=p$, $k=q$에서 불연속이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p\neq q$이다.)

33

▶ 21054-0167

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x+1$이다.
(나) 방정식 $f(x)-2x=3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\{f(0)\}^3$의 값은?

① $\frac{21}{2}$ ② $\frac{23}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

34

▶ 21054-0168

최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값 M을 갖는 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.)

(가) 방정식 $f(x)+k=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
(나) 방정식 $|f(x)|=k$는 서로 다른 7개의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $|f(x)|=M$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

보기

ㄱ. 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)+M=0$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35

▶ 21054-0169

삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)-f(1)$이라 하자. 실수 k에 대하여 방정식 $|g(x)|=g(k)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(7)=4$이다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a는 상수이다.)

보기

ㄱ. 함수 $g(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때 $M+m=0$이다.
ㄴ. 집합 $\{h(k)\,|\,k$는 실수$\}$의 원소의 개수는 5이다.
ㄷ. $g'(0)=-24$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수학 Ⅱ

유형 9 부등식에의 활용

출제유형 | 부등식 $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$의 해를 구하는 문제와 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 이용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k,\ g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x)\geq 3g(x)$$

가 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

출제 의도

도함수를 이용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$이고, 닫힌구간 $[-1, 4]$에서

$f(x)\geq 3g(x)$가 항상 성립하려면 $h(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	

$h(3)=27-27-27+30-k=3-k$

즉, 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이다. 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 $h(x)\geq 0$이려면 $h(3)=3-k\geq 0$이어야 한다.

따라서 $k\leq 3$이므로 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

36

▸ 21054-0170

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^3+3x^2-12x+a>0$이 성립할 때, 정수 a의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

37

▸ 21054-0171

두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=x^4-3x^3+a,\ g(x)=x^3-8x^2+16x+b$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립할 때, $a-b$의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

38

▸ 21054-0172

사차함수 $f(x)=(x-1)^3(x-3)$과 이차함수 $g(x)=(x-k)^2+m$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $(f\circ g)(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$가 성립한다.

모든 실수 k의 값의 곱은? (단, m은 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

유형 10 속도와 가속도

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점에 대한 함수식이나 그래프에서 점의 위치, 속도, 가속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

$$v=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$a=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$x_1=t^3-2t^2+3t$, $x_2=t^2+12t$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=3t^2-4t+3$, $v_2=2t+12$

이므로

$3t^2-4t+3=2t+12$에서

$3t^2-6t-9=0$

$3(t+1)(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$

이때 점 P의 위치는

$27-18+9=18$

점 Q의 위치는

$9+36=45$

이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$45-18=27$

답 27

39

▶ 21054-0173

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-at^2+3$이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도가 2일 때 시각 $t=2$에서의 점 P의 속도는? (단, a는 상수이다.)

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

40

▶ 21054-0174

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-4t^2-3t+1$일 때, 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

41

▶ 21054-0175

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$x_1=3t^3-3t^2+7t$, $x_2=2t^3+4t^2-3t$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간 두 점 P, Q의 속도의 차를 구하시오.

06 다항함수의 적분법

1 부정적분

(1) 연속함수 $f(x)$에 대하여 $F'(x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

로 나타내며, C를 적분상수라고 한다.

참고 $F(x)$, $G(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분이라 하면 $F'(x)=G'(x)=f(x)$이므로
$\{G(x)-F(x)\}'=f(x)-f(x)=0$에서 $G(x)-F(x)=C$ (단, C는 상수), $G(x)=F(x)+C$
즉, 함수 $f(x)$의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$의 꼴로 나타낼 수 있다.

2 다항함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분과 함수 $y=1$의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(2) $\int 1dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

3 부정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때,

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

4 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

참고 ① $\int_a^a f(x)dx=0$ ② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

5 정적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

6 정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(4) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

7 정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

② $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

8 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a) \text{ (단, } a\text{는 상수)}$$

9 곡선과 좌표축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

10 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

11 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 거리

점 P가 수직선 위를 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직일 때, 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 $f(a)$라 하면

(1) 점 P의 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

(2) 점 P의 시각 $t=b$에서의 위치 $f(b)$는 $f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$

(3) 점 P의 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$

유형 1 부정적분의 정의와 성질

출제유형 | $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 부정적분과 부정적분의 성질을 이용하여 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) n이 양의 정수일 때

$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

② $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$가

$f'(x)=x^3+x$, $f(0)=3$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (x^3+x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$이므로

$f(2)=4+2+3=9$

답 9

01

▸ 21054-0176

함수 $f(x)$가 $f(x)=\int (x^3+2x^2+1)\,dx-\int (x^3-x^2)\,dx$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

02

▸ 21054-0177

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2x$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 점 $(0, -2)$를 지날 때, $f(2)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

03

▸ 21054-0178

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int \{2xf(x)+(x^2-4)f'(x)\}dx=x^4-2x^3+8x-10$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

유형 2 정적분의 성질과 계산

출제유형 | 정적분의 성질을 이용한 계산 문제와 활용 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

정적분의 성질을 이해하고 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_1^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 (x+|x-3|)dx+\int_3^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 \{x-(x-3)\}dx+\int_3^4 \{x+(x-3)\}dx$

$=\int_1^3 3\,dx+\int_3^4 (2x-3)dx$

$=\Big[3x\Big]_1^3+\Big[x^2-3x\Big]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=6+4$

$=10$

답 10

04

▸ 21054-0179

함수 $f(x)=3x^2+12x-4$에 대하여 $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

05

▸ 21054-0180

함수 $f(x)=|x+1|+2|x|$에 대하여 $\int_{-1}^3 xf(x)\,dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06

▸ 21054-0181

함수 $f(x)=(x+1)(x-2)$에 대하여 $-1\le a\le 0$에서 정의된 함수 $g(a)$가 다음과 같다.

$$g(a)=\int_a^{a+3} |f(x)|\,dx$$

함수 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 3 함수의 성질을 이용한 정적분

출제유형 | 함수의 그래프가 y축 또는 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 |

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3} (x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

출제 의도

조건으로부터 함수의 그래프의 대칭성을 발견하고 이를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $y=h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$

(n은 0 또는 자연수, a_{2n+1}, a_{2n-1}, $\cdots$, a_1은 상수)

로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

또한 $(-x)h'(-x)=-\{xh'(x)\}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} (x+5)h'(x)\,dx&=\int_{-3}^{3} \{xh'(x)+5h'(x)\}dx\\&=0+2\int_{0}^{3} 5h'(x)dx\\&=10\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}\\&=10\{h(3)-h(0)\}\end{aligned}$$

$10\{h(3)-h(0)\}=10$에서

$h(3)-h(0)=1$

따라서 $h(3)=h(0)+1=0+1=1$

답 ①

07

▸ 21054-0182

$\int_{-3}^{3} (4x^3+6x^2+7x)\,dx$의 값을 구하시오.

08

▸ 21054-0183

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=6$
(다) $\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx=12$

$f(3)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

09

▸ 21054-0184

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{-1}^{1} x^2f'(x)dx=0$이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가질 때, α의 값은?

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

유형 4 정적분으로 나타내어진 함수

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 함숫값을 구하는 문제, 정적분으로 나타내어진 함수의 미분을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 a, b가 상수일 때 $\int_a^b f(t)dt$는 상수임을 이용한다.

(2) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a<x<b$)

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 의도

정적분으로 나타내어진 함수를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=4x^3+kx$

이때

$$k=\int_0^1 (4t^3+kt)\,dt$$

$$=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=1+\frac{k}{2}$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(1)=4+2=6$

답 ①

10

▸ 21054-0185

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+5t-2)\,dt$의 극댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11

▸ 21054-0186

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$$

를 만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

12

▸ 21054-0187

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^x f(t)dt=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+b$

(나) $g(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)dt$

함수 $f(x)$의 최솟값이 1일 때, $f(1)+g(-1)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

유형 5 정적분으로 나타내어진 함수의 극한

출제유형 | 정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$$

필수 유형

함수 $f(x)=2x^3-6x+12$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t)dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 의도

정적분으로 나타내어진 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t)dt &= \lim_{x \to 2} \frac{F(x)-F(2)}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \to 2} \left\{ \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= \frac{1}{4}F'(2) \\ &= \frac{1}{4}f(2) \\ &= \frac{1}{4}(16-12+12) \\ &= 4\end{aligned}$$

답 ④

13

▸ 21054-0188

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (3t^2+at-4a)dt = 12$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

14

▸ 21054-0189

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+2x+\int_{-1}^2 f(t)dt$$

를 만족시킨다.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = -15$$

일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15

▸ 21054-0190

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)=2x^3-3x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt$를 만족시킬 때,

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+7h} f(t)\,dt$의 값은?

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

유형 6 곡선과 좌표축 사이의 넓이

출제유형 | 곡선이 주어지고 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 주로 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 곡선이 x축과 만나는 점을 구하고 정적분을 이용하여 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

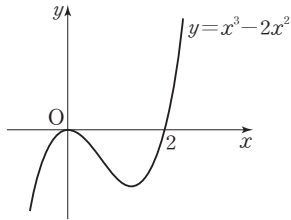
출제 의도

주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분을 이해하고 그 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$y=x^3-2x^2$

$\quad =x^2(x-2)$

곡선 $y=x^3-2x^2$은 다음과 같다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 |x^3-2x^2|\,dx$

$\quad =\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$

$\quad =\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$

$\quad =-4+\frac{16}{3}$

$\quad =\frac{4}{3}$

답 ②

16 ▸ 21054-0191

곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

17 ▸ 21054-0192

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가질 때, 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 24이다. 삼차함수 $f(x)$에서 x의 계수는?

① -6 ② $-\frac{25}{4}$ ③ $-\frac{13}{2}$

④ $-\frac{27}{4}$ ⑤ -7

18 ▸ 21054-0193

곡선 $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$가 x축과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$

④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

유형 7 두 곡선 사이의 넓이

출제유형 | 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 곡선이 만나는 점을 구할 필요가 있을 때는 방정식을 이용하여 만나는 점을 구하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

두 함수

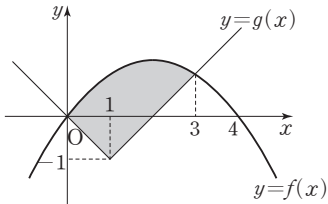
$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x)=|x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.

$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로 $\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서 $x=0$

$x\geq1$일 때, $g(x)=x-2$이므로 $\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6$, $x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로

$x=3$

$$S=\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}=\frac{7}{2}$$

이므로 $4S=14$

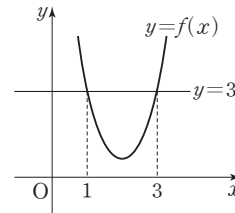
답 14

19 ▸ 21054-0194

두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{14}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

20 ▸ 21054-0195

그림과 같이 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$은 x좌표가 1, 3인 서로 다른 두 점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$
④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

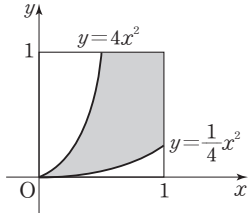
21 ▸ 21054-0196

두 곡선 $y=x(x+1)(x-3)$, $y=-x(x-3)$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{245}{12}$ ② $\frac{247}{12}$ ③ $\frac{83}{4}$
④ $\frac{251}{12}$ ⑤ $\frac{253}{12}$

22

▸ 21054-0197

그림과 같이 두 곡선 $y=4x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 두 직선 $x=1$, $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

23

▸ 21054-0198

함수 $f(x)=x^3-4x^2+5x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선을 A라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

유형 8 여러 형태의 조건이 주어진 넓이

출제유형 | 함수의 성질, 정적분의 정의와 성질, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 함수의 도함수, 여러 형태의 그래프, 함수의 성질과 특징, 정적분의 정의와 넓이의 관계, 미분의 활용 등을 이용하여 넓이를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
> (나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

출제 의도

조건을 해석하고 정적분의 성질을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야 한다.

또 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x)\,dx&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 \{f(x)+4\}\,dx\\&=2\int_0^3 f(x)\,dx+12\end{aligned}$$

에서

$2\int_0^3 f(x)\,dx+12=0$, $\int_0^3 f(x)\,dx=-6$

따라서 $\int_3^6 f(x)\,dx=6$이므로

$$\begin{aligned}\int_6^9 f(x)\,dx&=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}\,dx=12+\int_3^6 f(x)\,dx\\&=12+6=18\end{aligned}$$

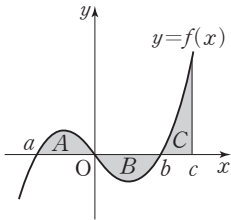
답 ④

24

▸ 21054-0199

그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(b,\ 0)$에서 만나는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=c$에 의해 만들어지는 세 부분의 넓이를 각각 A, B, C라 할 때, 삼차함수 $f(x)$와 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B, C가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) $3\int_{a}^{c} |f(x)|\,dx-4\int_{a}^{c} f(x)\,dx=10$

$\int_{a}^{c} |f(x)|\,dx$의 값을 구하시오. (단, $a<0<b<c$)

25

▸ 21054-0200

$-1\le x\le a\ (a>1)$에서

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$

인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+a+1)$이다.

(나) $\int_{-1}^{a} f(x)\,dx=\frac{9}{4}$

$-1\le x\le 2a+1$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $6S$의 값을 구하시오.

26

▸ 21054-0201

함수 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-ax$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 부호가 서로 다르다.

(나) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분 중에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$이다.

상수 a의 값을 구하시오.

27

▸ 21054-0202

삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프 위의 점 $(1,\ 27)$에서의 접선과 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7

④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

28

▸ 21054-0203

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, 곡선 $y=4x^3+3x^2$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $m\sqrt{6}$이다. 자연수 m의 값을 구하시오.

유형 9 수직선 위의 속도와 거리

출제유형 | 수직선 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치와 위치의 변화량, 움직인 거리의 차이점을 이해하고 이를 이용하여 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

수직선 위를 움직이는 점의 속도에 대한 식에서 위치를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_1(t)=v_2(t)$일 때이므로

$3t^2+t=2t^2+3t$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2 (3t^2+t)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$

$t=2$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2 (2t^2+3t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{16}{3}+6=\frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리 a는

$$a=\left|\frac{34}{3}-10\right|=\frac{4}{3}$$

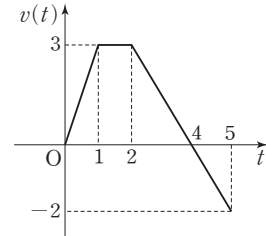
이므로

$$9a=9\times\frac{4}{3}=12$$

답 12

29

▸ 21054-0204

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0\leq t\leq 5)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음 그림과 같다.

$t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

30

▸ 21054-0205

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=t^2-2t+9$, $v_2(t)=2t+\frac{19}{3}$이다. 두 점 P, Q가 출발 후 첫 번째 만날 때부터 두 번째 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

① 24 ② $\frac{73}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ 25 ⑤ $\frac{76}{3}$

31

▸ 21054-0206

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)=t(2-t)(4-t),\ v_2(t)=a-2t\ (a\geq 0)$$

이다. 두 점 A, B가 출발 후 세 번 만나기 위한 모든 실수 a의 값의 범위는 $\frac{q}{p}<a<4$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

수학 Ⅱ

07 경우의 수

1 원순열

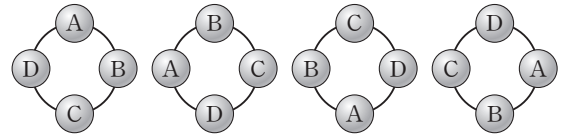
(1) 원순열의 뜻

서로 다른 대상을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

참고 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.

(2) 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

설명 네 개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $_4\mathrm{P}_4=4!$이지만 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있다. 예를 들어 일렬로 배열할 때 서로 다른 ABCD, BCDA, CDAB, DABC의 4가지 순열은 그림과 같이 각각 위쪽에 있는 자리부터 시곗바늘이 도는 방향에 따라 원형으로 배열하면 모두 한 가지 원순열이 된다.

따라서 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{4!}{4}=(4-1)!=6$이다.

2 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

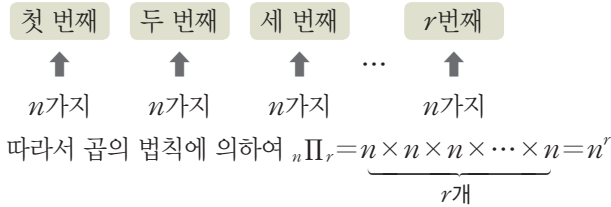
서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로 $_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.

참고 순열의 수 $_n\mathrm{P}_r$에서는 $n\geq r$이지만 중복순열의 수 $_n\Pi_r$에서는 중복을 허락하기 때문에 $n<r$일 수도 있다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 $_n\Pi_r=n^r$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 배열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 $_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$

3 같은 것이 있는 순열

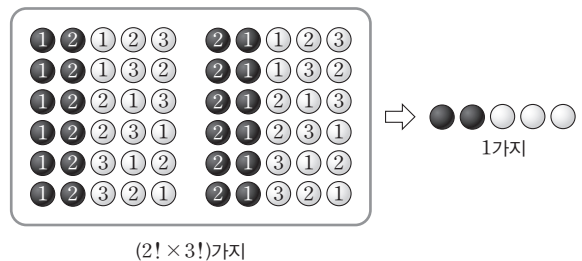
(1) 같은 것이 있는 순열의 뜻

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 배열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

설명 그림과 같이 크기와 모양은 같고 번호로 구별이 되는 검은 공 2개와 흰 공 3개를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는 $5!$이지만 번호로 구별하지 않는다면 같은 것이 $(2!\times3!)$가지씩 있다. 따라서 크기와 모양이 같은 검은 공 2개와 흰 공 3개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$이다.

4 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명 2개의 문자 A, B에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 조합은 AAA, AAB, ABB, BBB의 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}=4$이다.
위의 4가지 조합은 모두 문자를 놓을 세 자리 ○와 문자를 구분하는 경계에 놓을 ▌를 이용하여 그림과 같이 나타낼 수 있다.
따라서 서로 다른 2개의 문자 A, B에서 3개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}$은 3개의 ○와 $(2-1)$개의 ▌를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.
즉, $(2+3-1)$개의 자리에서 ○를 놓을 3개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}$이다.

AAA ⇔ ○○○▌
AAB ⇔ ○○▌○
ABB ⇔ ○▌○○
BBB ⇔ ▌○○○
⇓ ⇓
${}_{2}\mathrm{H}_{3} = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}$

5 이항정리

(1) 이항정리의 뜻

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^n={}_{n}\mathrm{C}_{0}a^n+{}_{n}\mathrm{C}_{1}a^{n-1}b+{}_{n}\mathrm{C}_{2}a^{n-2}b^2+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^r+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}b^n=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^r$$

이를 $(a+b)^n$에 대한 이항정리라고 한다. 또 이 전개식에서 각 항의 계수 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{1}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$, $\cdots$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$, $\cdots$, ${}_{n}\mathrm{C}_{n}$을 이항계수, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

(2) 이항계수의 성질

자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

① ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^n$

② ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+(-1)^n{}_{n}\mathrm{C}_{n}=0$

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$ (단, n은 홀수)
${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$ (단, n은 짝수)

6 파스칼의 삼각형

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$의 값을 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$ $(1\le r\le n-1)$임을 이용하여 차례로 삼각형 모양으로 배열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

$(a+b)^0$	1	➡	1
$(a+b)^1$	${}_{1}\mathrm{C}_{0}$ ${}_{1}\mathrm{C}_{1}$		1 1
$(a+b)^2$	${}_{2}\mathrm{C}_{0}$ ${}_{2}\mathrm{C}_{1}$ ${}_{2}\mathrm{C}_{2}$		1 2 1
$(a+b)^3$	${}_{3}\mathrm{C}_{0}$ ${}_{3}\mathrm{C}_{1}$ ${}_{3}\mathrm{C}_{2}$ ${}_{3}\mathrm{C}_{3}$		1 3 3 1
$(a+b)^4$	${}_{4}\mathrm{C}_{0}$ ${}_{4}\mathrm{C}_{1}$ ${}_{4}\mathrm{C}_{2}$ ${}_{4}\mathrm{C}_{3}$ ${}_{4}\mathrm{C}_{4}$		1 4 6 4 1
⋮	⋮		⋮

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$
${}_{n}\mathrm{C}_{r}$

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$

참고 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다. 따라서 파스칼의 삼각형에서 각 단계의 배열은 좌우대칭임을 알 수 있다.

유형 1 원순열

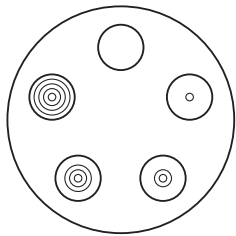
출제유형 | 원형으로 물건이나 사람을 배열하거나 원형으로 배열된 자리에 색칠하는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 원순열의 뜻을 알고, 회전하여 일치하는 경우에는 같은 것으로 생각하므로 원형으로 배열하여 같은 모양이 나타나는 경우의 수를 파악할 수 있도록 한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

출제 의도

원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

구하는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

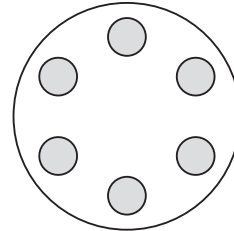
$(5-1)!=4!=24$

답 ④

01

▸ 21054-0207

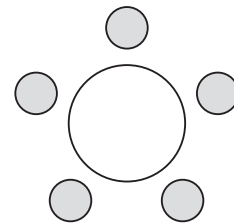
원 모양의 케이크 위를 서로 다른 3가지의 초콜릿과 서로 다른 3가지의 과일을 간격이 일정하게 원형으로 모두 배열하려고 한다. 3가지의 초콜릿끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

02

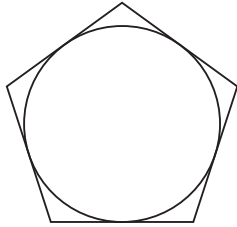
▸ 21054-0208

원형 탁자에 5개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 남학생 2명과 여학생 3명이 모두 5개의 의자에 앉으려고 할 때, 남학생 2명이 서로 이웃하여 앉지 않는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

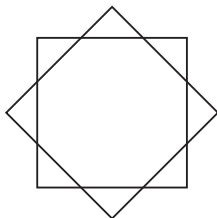
① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

03

▸ 21054-0209

그림과 같이 정오각형에 내접하는 원이 그려진 도형이 있다. 이 도형의 6개 영역에 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 한 영역에 한 가지 색만을 칠하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 144 ② 150 ③ 156
④ 162 ⑤ 168

04

▸ 21054-0210

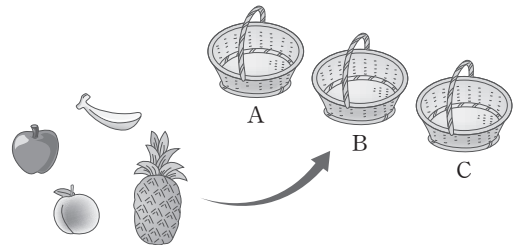
그림과 같이 크기가 같은 두 정사각형을 겹쳐서 합동인 8개의 직각이등변삼각형이 생기도록 만든 도형이 있다. 파란색, 빨간색을 포함한 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 8개의 직각이등변삼각형 각각에 한 가지 색만을 칠하려고 한다. 파란색과 빨간색을 서로 맞은편의 직각이등변삼각형에 칠하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 680 ② 690 ③ 700
④ 710 ⑤ 720

유형 2 중복순열

출제유형 | 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 중복순열의 뜻을 정확히 이해하고 나열하는 경우 중에서 순열, 중복순열을 구분할 수 있어야 한다.

필수 유형

서로 다른 종류의 과일 4개를 세 개의 바구니 A, B, C에 남김없이 담는 경우의 수를 구하시오.
(단, 과일을 하나도 담지 않는 바구니가 있을 수 있다.)

출제 의도

중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

서로 다른 종류의 과일 4개를 세 개의 바구니 A, B, C에 남김없이 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_{3}\Pi_{4}=3^4=81$

답 81

[참고]

서로 다른 종류의 과일 4개가 세 개의 바구니 A, B, C를 하나씩 택한다고 생각할 수 있다. 이때 빈 바구니가 생길 수 있으므로 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복순열의 수로 생각할 수 있다.

05

▸ 21054-0211

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수를 구하시오.

> (가) 집합 X의 원소 x에 대하여 x가 짝수이면 $f(x)$는 소수이다.
> (나) 집합 X의 원소 x에 대하여 x가 홀수이면 $f(x)$는 짝수이다.

06

▸ 21054-0212

서로 다른 종류의 연필 6자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주려고 할 때, 학생 A에게는 2자루, 학생 B에게는 1자루만 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 연필을 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 360 ② 390 ③ 420
④ 450 ⑤ 480

07

▸ 21054-0213

4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 4개의 숫자를 택한 후 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중에서 각 자리에 숫자 1이 이웃하여 나타나지 않는 짝수인 자연수의 개수는?

① 114 ② 116 ③ 118
④ 120 ⑤ 122

유형 3 같은 것이 있는 순열(1)

출제유형 | 같은 것이 2개 이상 있는 숫자 또는 문자들을 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 같은 것이 있는 순열의 수를 정확히 이해하고 경우의 수를 구할 수 있도록 한다. 특히 특정한 대상들의 순서가 이미 정해진 경우에도 그 대상들을 같은 것으로 생각하여 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 52 ② 56 ③ 60
④ 64 ⑤ 68

출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

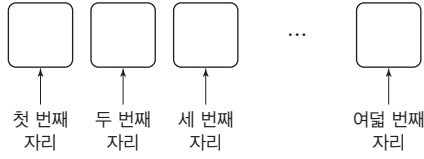
6개의 문자 중에서 같은 문자인 a가 3개, b가 2개 있다.
따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3! \times 2!}=60$

답 ③

08

▸ 21054-0214

8개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6을 모두 일렬로 나열할 때, 홀수 번째의 모든 자리에 3 이상의 숫자가 나열되는 경우의 수는?

① 132 ② 135 ③ 138
④ 141 ⑤ 144

09

▸ 21054-0215

10개의 문자 b, o, o, k, k, e, e, p, e, r를 모두 일렬로 나열할 때, 5개의 문자 o, o, e, e, e가 모두 이웃하여 나열되는 경우의 수는?

① 3450 ② 3500 ③ 3550
④ 3600 ⑤ 3650

10

▸ 21054-0216

8개의 문자 a, a, b, b, b, c, c, c를 모두 일렬로 나열할 때, 양쪽 끝에는 모두 문자 a가 놓이지 않고 문자 a끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열되는 경우의 수는?

① 160 ② 180 ③ 200
④ 210 ⑤ 220

11

▸ 21054-0217

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=17f(5)$$

를 만족시키는 함수 $f : X \longrightarrow X$의 개수를 구하시오.

확률과 통계

12

▸ 21054-0218

크기가 서로 다른 검은 공 4개와 같은 종류의 흰 공 3개가 있다. 이 7개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 검은 공은 큰 것부터 작은 것 순서로 나열되는 경우의 수는?

(단, 같은 종류의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 28 ② 35 ③ 42
④ 49 ⑤ 56

13

▸ 21054-0219

야구공, 테니스공, 탁구공이 각각 2개, 2개, 3개씩 모두 7개의 공이 있다. 이 7개의 공 중에서 5개의 공을 택하여 5명의 학생에게 각각 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 같은 종류의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

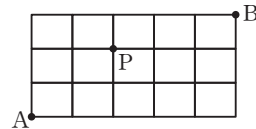
① 128 ② 130 ③ 132
④ 134 ⑤ 136

유형 4 같은 것이 있는 순열(2)

출제유형 | 직사각형 모양의 도로에서 최단거리로 이동하는 경우의 수를 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 직사각형 모양의 도로망에서 가로로 이동하는 횟수와 세로로 이동하는 횟수를 파악한 후 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구한다. 특별한 조건이 주어진 상황에서는 반드시 지나는 점을 유념하여 경우의 수를 구하도록 한다.

필수 유형

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구하시오.

출제 의도

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 도로망을 따라 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

A지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 8개의 문자 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{5!\times 3!}=56$

또 A지점에서 P지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, P지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 A지점에서 출발하여 P지점을 거쳐 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{4!}{3!}=6\times 4=24$

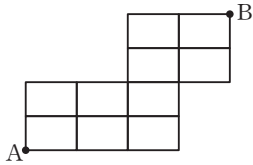
따라서 구하는 경우의 수는

$56-24=32$

답 32

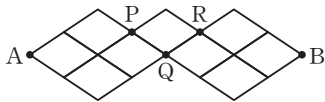
14

▸ 21054-0220

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는?

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

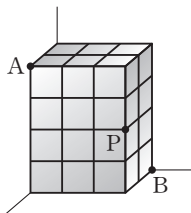
15

▸ 21054-0221

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 구간 PQ 또는 구간 QR를 거쳐 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는?

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

16

▸ 21054-0222

그림과 같이 크기가 같은 작은 정육면체 24개를 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 거쳐 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 직육면체의 바깥쪽 면에 보이는 작은 정육면체의 모서리들만 따라 이동한다.)

유형 5 중복조합(1)

출제유형 | 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 중복조합의 뜻을 정확히 이해하고 택하는 대상과 중복하여 택하는 횟수를 파악하여 중복조합의 수를 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 |

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

(가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.
(나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

출제 의도

중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)로부터 각 학생에게 초콜릿을 1개씩 먼저 나누어 주고, 남은 4개의 초콜릿을 조건 (나)를 만족시키도록 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 다음과 같다.

B	A	C와 D	C와 D에게 나누어 주는 경우의 수
0	1	3	${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3=4$
	2	2	${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3$
	3	1	${}_2C_1=2$
	4	0	1
1	2	1	${}_2C_1=2$
	3	0	1

따라서 구하는 경우의 수는
$4+3+2+1+2+1=13$

답 ②

17

▸ 21054-0223

4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4를 2개 이상 택하는 경우의 수를 구하시오.

18

▸ 21054-0224

같은 종류의 연필 4자루, 같은 종류의 볼펜 3자루, 사인펜 1자루를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 연필, 볼펜, 사인펜 중 어느 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 450 ② 465 ③ 480
④ 495 ⑤ 510

19

▸ 21054-0225

서로 다른 종류의 셔츠 4벌과 같은 종류의 바지 7벌을 같은 종류의 3개의 옷장에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 옷장에 셔츠와 바지가 각각 1벌 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 70 ② 75 ③ 80
④ 85 ⑤ 90

유형 6 중복조합(2)

출제유형 | 방정식을 만족시키는 정수해의 순서쌍의 개수를 구하거나 대소 관계로 정의된 정수해의 순서쌍의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 문제를 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수를 구하는 형태로 변형한다.
즉, 방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 9월 모의평가 |

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [4점]

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49
④ 54 ⑤ 59

출제 의도

중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$
이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) $y+z=0$ $(x=10)$일 때
음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍의 개수는 $(10, 0, 0)$의 1이다.
(ii) $y+z=10$ $(x=0)$일 때
음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_1=11$
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$66-(1+11)=54$

답 ④

20

▸ 21054-0226

방정식 $x+y+z+w^2=11$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

21

▸ 21054-0227

방정식 $a+b+c+5d=13$을 만족시키는 양의 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

22

▸ 21054-0228

다음 조건을 만족시키는 5000보다 큰 네 자리 자연수의 개수를 구하시오.

(가) 각 자리의 숫자는 0이 아니다.
(나) 각 자리의 숫자의 합은 10이다.

23

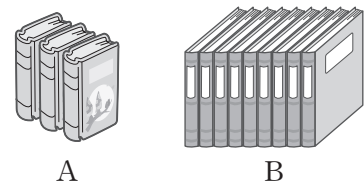
▸ 21054-0229

3권의 같은 종류의 책 A와 9권의 같은 종류의 책 B를 모두 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 책 A끼리는 서로 이웃하지 않고 맨 앞과 맨 뒤에 적어도 2권의 책 B가 각각 연속하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 책끼리는 서로 구별하지 않는다.)

A

B

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

확률과 통계

24

▸ 21054-0230

서로 다른 네 개의 상자 A, B, C, D에 다음 조건을 만족시키도록 같은 종류의 구슬 10개를 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는?

(가) A 상자에는 홀수 개의 구슬을 넣는다.
(나) B와 C 상자에는 각각 적어도 1개의 구슬을 넣는다.

① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

25

▸ 21054-0231

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$을 만족시키는 X의 원소 x가 오직 하나만 존재한다.
(나) $f(1)<f(2)$, $f(3) \le f(4) \le f(5)$

유형 7 이항정리(1)

출제유형 | 이항정리를 이용한 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구하거나 특정한 항의 계수 사이에 성립하는 관계식에서 미지수를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | n이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$에서 주어진 조건을 만족시키는 r의 값을 구한 후 특정한 항의 계수를 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

다항식 $(1+2x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

출제 의도

이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

다항식 $(1+2x)^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4C_r 1^{4-r}(2x)^r = {}_4C_r \times 2^r \times x^r$ $(r=0, 1, 2, 3, 4)$
이때 x^2항은 $r=2$일 때이므로 구하는 계수는
${}_4C_2 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$

답 24

26

▸ 21054-0232

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는?

① -84 ② -82 ③ -80
④ -78 ⑤ -76

27

▸ 21054-0233

다항식 $(3x+2y)^6$의 전개식에서 xy^5의 계수는?

① 552 ② 558 ③ 564
④ 570 ⑤ 576

28

▸ 21054-0234

x에 대한 다항식 $(x+a)^5$의 전개식에서 x^2의 계수가 80일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

29

▸ 21054-0235

x에 대한 다항식 $(2x+a)^5$의 전개식에서 x^2의 계수가 x^4의 계수의 $\frac{1}{4}$배일 때, $60a^2$의 값을 구하시오.

(단, a는 0이 아닌 상수이다.)

30

▸ 21054-0236

x에 대한 다항식
$(1+ax)+(1+ax)^2+(1+ax)^3+\cdots+(1+ax)^8$의 전개식에서 x^2의 계수가 42일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ 1 ⑤ 2

31

▸ 21054-0237

x에 대한 두 다항식 $3\{(a+x)^n-(a-x)^n\}$과 $x(a+x)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 서로 같게 되는 모든 순서쌍 (n, a)에 대하여 $n+a$의 최댓값을 구하시오.

(단, a는 자연수이고 n은 2 이상의 자연수이다.)

유형 8 이항정리(2)

출제유형 | 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 얻어지는 이항계수의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 다항식 $(1+x)^n$의 전개식으로부터 유도되는 다음의 등식을 활용한다.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$ (단, n은 홀수)

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ (단, n은 짝수)

필수 유형 | 2006학년도 대수능 9월 모의평가 |

자연수 n에 대하여

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도

이항계수의 성질을 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

다항식 $(1+x)^{2n}$의 전개식은

$(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ …… ㉠

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉡

등식 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots-{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$ …… ㉢

㉡$-$㉢을 하여 양변을 2로 나누면

${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$이므로

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}$$

이때 $f(n)$은 첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$f(5)=\sum_{k=1}^{5}2^{2k-1}=\frac{2(4^5-1)}{4-1}=682$$

답 682

32

▸ 21054-0238

$\log_2\{2^{51}-({}_{51}C_0+{}_{51}C_1+{}_{51}C_2+\cdots+{}_{51}C_{24}+{}_{51}C_{25})\}$의 값은?

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

33

▸ 21054-0239

$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{{}_{2n}C_k}{5}$라 할 때, $f(n)$이 자연수가 되도록 하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오.

34

▸ 21054-0240

서로 다른 종류의 학용품 10개 중에서 2개 이상의 학용품을 골라 포장하여 선물 세트를 만들 때, 만들 수 있는 선물 세트의 종류의 가짓수는? (단, 선물 세트는 포장된 학용품으로 구분한다.)

① 1011 ② 1013 ③ 1015 ④ 1017 ⑤ 1019

08 확률

1 시행

같은 조건에서 반복할 수 있고 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰

참고 (1) **표본공간** : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

(2) **사건** : 표본공간의 부분집합

(3) **근원사건** : 한 개의 원소로 이루어진 사건

2 여러 가지 사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(2) 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(3) **배반사건** : 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 배반사건이라고 한다.

(4) **여사건** : 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이다.

3 확률의 뜻

(1) **확률** : 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(A)$와 같이 나타낸다.

(2) **수학적 확률** : 표본공간이 S인 어떤 시행에서 S의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 원소의 개수 $n(S)$, 사건 A의 원소의 개수 $n(A)$에 대하여 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 정의하고, 이를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

(3) **통계적 확률** : 같은 시행을 n회 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하자. 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

그런데 실제로 시행 횟수 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

참고 일반적으로 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 사실이 알려져 있다.

4 확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) 표본공간(반드시 일어나는 사건) S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

5 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

6 여사건의 확률

사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

참고 두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C에 대하여

① $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$　　② $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

7 조건부확률

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타낸다. 즉, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

참고 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A가 일어났다는 조건에서 사건 B가 일어날 확률을 의미하므로 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 $A\cap B$가 일어날 확률을 뜻한다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

8 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

9 사건의 독립과 종속

(1) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는 확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다. 즉, 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$$

참고 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이면 다음 각 두 사건도 서로 독립이다.

① A^C과 B　　② A와 B^C　　③ A^C과 B^C

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A, B는 서로 종속이라고 한다.

(3) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

10 독립시행의 확률

(1) 동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않을 경우, 즉 각 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 하면 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

유형 1 확률의 뜻과 수학적 확률

출제유형 | 경우의 수를 이용하여 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 표본공간 S의 원소의 개수와 사건 A의 원소의 개수를 구하여 사건 A가 일어날 수학적 확률을 구한다. 즉,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a>b$이고 $a>c$일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{54}$ ② $\frac{55}{216}$ ③ $\frac{29}{108}$
④ $\frac{61}{216}$ ⑤ $\frac{8}{27}$

출제 의도

수학적 확률의 뜻을 알고 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

한 개의 주사위를 세 번 던져서 차례로 나오는 눈의 수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6\times6\times6=216$

a의 값에 따라 $a>b$이고 $a>c$를 만족시키는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 다음 표와 같다.

a	b	c	(a, b, c)의 개수
2	1	1	$1\times1=1$
3	1, 2	1, 2	$2\times2=4$
4	1, 2, 3	1, 2, 3	$3\times3=9$
5	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	$4\times4=16$
6	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5	$5\times5=25$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+4+9+16+25}{216}=\frac{55}{216}$$

답 ②

01

▶ 21054-0241

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 3의 배수가 될 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

02

▶ 21054-0242

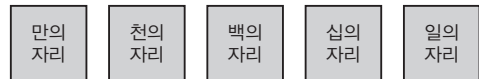
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 이차방정식 $x^2=ab+a$의 근이 모두 유리수가 될 확률은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

03

▶ 21054-0243

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5장의 카드가 있다. 이 5장의 카드를 임의로 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 하나를 선택할 때, 선택한 수가 홀수이면서 천의 자리의 수가 짝수인 자연수일 확률은?

만의 자리	천의 자리	백의 자리	십의 자리	일의 자리

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

04

▸ 21054-0244

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 모두 홀수이거나 모두 짝수일 확률은?

① $\frac{8}{21}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{10}{21}$
④ $\frac{11}{21}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

05

▸ 21054-0245

1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 20개의 구슬이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 그 구슬에 적힌 수를 n이라 할 때, 직선 $y=2x+n$이 원 $x^2+y^2=5$와 서로 다른 두 점에서 만날 확률은?

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

06

▸ 21054-0246

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드를 한 장씩 세 번 꺼내어 카드에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $3a+2b+c$의 값이 짝수일 확률은?

(단, 꺼낸 카드는 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{8}{21}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{10}{21}$
④ $\frac{11}{21}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

유형 2 순열의 수를 이용한 확률

출제유형 | 여러 가지 순열의 수를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 어떤 시행에서 표본공간 S의 원소의 개수와 사건 A의 원소의 개수를 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이용하여 구한 후 사건 A가 일어날 확률을 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 12일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{5}{72}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{11}{72}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

출제 의도

중복순열과 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

한 개의 주사위를 네 번 던져서 차례로 나오는 눈의 수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_6\Pi_4=6^4$

등식 $a\times b\times c\times d=12$에서

$12=6\times2\times1\times1=4\times3\times1\times1=3\times2\times2\times1$

따라서 구하는 확률은

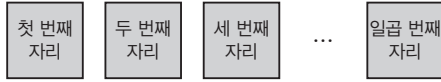
$$\frac{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}}{6^4}=\frac{12+12+12}{6^4}=\frac{1}{36}$$

답 ①

07

▸ 21054-0247

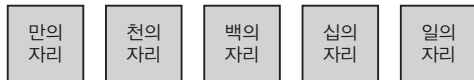
1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수 번째 자리에는 짝수가 적힌 카드가 놓일 확률은?

첫 번째 자리	두 번째 자리	세 번째 자리	…	일곱 번째 자리

① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{3}{70}$ ③ $\frac{2}{35}$
④ $\frac{1}{14}$ ⑤ $\frac{3}{35}$

08

▸ 21054-0248

주머니에 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7개의 구슬이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 구슬을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 하나를 선택할 때, 선택한 자연수의 백의 자리의 수가 일의 자리의 수와 만의 자리의 수의 평균과 같을 확률은?

만의 자리	천의 자리	백의 자리	십의 자리	일의 자리

① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{4}{35}$ ③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

09

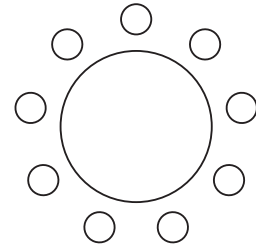
▸ 21054-0249

서로 다른 6개의 구슬을 남김없이 네 사람 A, B, C, D에게 임의로 나누어 줄 때, A는 2개, B는 1개만 받도록 나누어 줄 확률은? (단, 구슬을 하나도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① $\frac{11}{128}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{13}{128}$
④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{15}{128}$

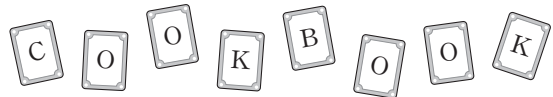
10

▸ 21054-0250

그림과 같이 원형 탁자에 9개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 4명이 모두 이 9개의 의자에 임의로 앉을 때, 1학년 2명은 서로 이웃하고 2학년 3명은 서로 이웃하지 않도록 앉을 확률은?
(단, 의자끼리는 서로 구별하지 않고 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $\frac{1}{56}$ ② $\frac{1}{28}$ ③ $\frac{3}{56}$
④ $\frac{1}{14}$ ⑤ $\frac{5}{56}$

11

▸ 21054-0251

8개의 문자 C, O, O, K, B, O, O, K가 하나씩 적힌 8장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, O가 적힌 4장의 카드가 처음부터 연속하여 나열될 확률은?

① $\frac{1}{105}$ ② $\frac{1}{70}$ ③ $\frac{2}{105}$
④ $\frac{1}{42}$ ⑤ $\frac{1}{35}$

확률과 통계

유형 3 조합의 수를 이용한 확률

출제유형 | 조합, 중복조합의 수를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 어떤 시행에서 표본공간 S의 원소의 개수와 사건 A의 원소의 개수를 조합, 중복조합의 수를 이용하여 구한 후 사건 A가 일어날 확률을 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 네 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개와 검은 공 2개가 나올 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{16}{35}$ ③ $\frac{18}{35}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{22}{35}$

출제 의도

조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주머니에 들어 있는 7개의 공 중에서 네 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

흰 공 3개에서 2개, 검은 공 4개에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$

답 ③

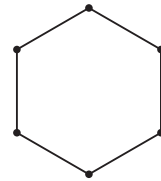
12

▸ 21054-0252

흰 공 3개, 검은 공 2개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공의 색이 2가지로 나올 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13

▸ 21054-0253

한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중 임의로 서로 다른 3개의 꼭짓점을 택할 때, 택한 3개의 꼭짓점으로 만든 삼각형의 세 변 중에서 두 변의 길이의 합이 3일 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

14

▸ 21054-0254

방정식 $a+b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c, d)가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $cd\neq0$	(나) $a>2b$

① $\frac{25}{143}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $\frac{27}{143}$ ④ $\frac{28}{143}$ ⑤ $\frac{29}{143}$

유형 4 확률의 덧셈정리

출제유형 | 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 주어진 사건의 확률을 한 번에 구하는 것이 복잡할 때, 사건이 일어날 경우를 몇 가지로 나누어 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구한다.

필수 유형 | 2021학년도 대수능 6월 모의평가 |

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

출제 의도

확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

a, b의 순서쌍을 (a, b)라 할 때, 순서쌍 (a, b)의 모든 개수는 $6\times 6=36$이다.

(i) $|a-3|+|b-3|=2$인 사건을 A라 할 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수는
$|a-3|=0$, $|b-3|=2$일 때, $(3, 1)$, $(3, 5)$
$|a-3|=1$, $|b-3|=1$일 때, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$
$|a-3|=2$, $|b-3|=0$일 때, $(1, 3)$, $(5, 3)$
에서 8이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}$

(ii) $a=b$인 사건을 B라 할 때, 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$
에서 6이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$

(iii) 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는
$(2, 2)$, $(4, 4)$에서 2이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{1}{3}$$

답 ②

15

▸ 21054-0255

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{12},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B^C)=\frac{5}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

16

▸ 21054-0256

2부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 구슬 8개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 개의 구슬에 적힌 두 수의 공약수 중 2 또는 3이 있을 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{9}{28}$
④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

17

▸ 21054-0257

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 1이 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 짝수가 적혀 있는 카드가 나열되거나 2가 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 홀수가 적혀 있는 카드가 나열될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 5 여사건의 확률

출제유형 | 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 구하고자 하는 사건 A의 확률을 구하는 것보다 여사건 A^C의 확률을 구하기가 쉬울 때,

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$

임을 이용하여 사건 A의 확률을 구한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 6월 모의평가 |

검은 공 3개, 흰 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공일 확률은? [3점]

① $\frac{19}{35}$ ② $\frac{22}{35}$ ③ $\frac{5}{7}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{31}{35}$

출제 의도

여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

주머니에 들어 있는 7개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$

꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 사건 A^C은 꺼낸 3개의 공이 모두 흰 공인 사건이다.

꺼낸 3개의 공이 모두 흰 공인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3=4$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{35}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

답 ⑤

18

▸ 21054-0258

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9개의 구슬이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{18}$
④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

19

▸ 21054-0259

여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 5를 임의로 일렬로 나열한 것 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 1이 3보다 왼쪽에 나열되거나 4가 2보다 왼쪽에 나열될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

20

▸ 21054-0260

여자 3명과 남자 4명이 참가한 어느 노래 경연대회에서 참가한 7명 모두가 한 명씩 임의로 순번을 정하여 경연하려고 할 때, 처음 또는 마지막에 여자 참가자가 경연하게 될 확률은?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

유형 6 조건부확률의 계산

출제유형 | 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 계산 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률, 조건부확률 등 확률의 성질을 이용하여 계산 문제를 해결할 수 있도록 한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)=\frac{7}{10},\ P(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $P(B^C|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

출제 의도

조건부확률의 뜻을 이해하고 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$P(B^C|A^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}$이다.

$P(A)=\frac{7}{10}$이므로

$P(A^C)=1-P(A)=\frac{3}{10}$

$P(A\cup B)=\frac{9}{10}$이므로

$P(A^C\cap B^C)=1-P(A\cup B)=\frac{1}{10}$

따라서

$$P(B^C|A^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

답 ④

21

▸ 21054-0261

두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B|A^C)=\frac{1}{4}$$

일 때, $P(A^C\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

22

▸ 21054-0262

두 사건 A, B에 대하여

$$P(A)=\frac{3}{4},\ P(B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $P(B|A)$의 최솟값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

23

▸ 21054-0263

두 사건 A, B에 대하여

$$P(A|B)=\frac{1}{4},\ P(B|A)=\frac{1}{3},\ P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

일 때, $P(A)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

유형 7 표를 이용한 조건부확률

출제유형 | 표로 제시된 상황에서 조건부확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ (P(A)>0)$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

어느 학교 학생 200명을 대상으로 체험활동에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 문화체험과 생태연구 중 하나를 선택하였고, 각각의 체험활동을 선택한 학생의 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	문화체험	생태연구	합계
남학생	40	60	100
여학생	50	50	100
합계	90	110	200

이 조사에 참여한 학생 200명 중에서 임의로 선택한 1명이 생태연구를 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{6}{11}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

출제 의도

조건부확률의 뜻을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

학생 200명 중에서 임의로 선택한 1명이 생태연구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

$P(A)=\frac{110}{200}=\frac{11}{20}$,

$P(A\cap B)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$

이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}}=\frac{5}{11}$$

답 ①

24

▸ 21054-0264

어느 고등학교 3학년 전체 학생 200명을 대상으로 방과후학교의 수강과 석식의 신청 여부를 조사한 결과가 다음과 같다.

(단위 : 명)

석식 \ 방과후학교	수강함	수강하지 않음	합계
신청함	80	60	140
신청하지 않음	40	20	60
합계	120	80	200

이 고등학교 3학년 전체 학생 중 임의로 선택한 1명이 석식을 신청하지 않은 학생일 때, 이 학생이 방과후학교를 수강한 학생일 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25

▸ 21054-0265

A, B 두 회사의 스마트폰을 이용하는 사람 300명을 대상으로 잠금해제 방법에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 사람은 비밀번호 인증과 바이오 인증 중 하나를 선택하였고, 각각의 잠금해제 방법을 선택한 사람의 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

인증 \ 회사	A	B	합계
비밀번호 인증	a	b	120
바이오 인증	c	d	180
합계	150	150	300

이 300명 중에서 임의로 선택한 한 사람이 A회사의 스마트폰을 이용하고 바이오 인증을 선호할 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이 300명 중에서 임의로 선택한 한 사람이 B회사의 스마트폰을 이용하는 사람일 때, 이 사람이 비밀번호 인증을 선호하는 사람일 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

유형 8 조건부확률의 활용

출제유형 | 실생활 등의 다양한 상황에서 조건부확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) '~인 사건이 일어났을 때, ~인 사건이 일어날 확률'은 조건부확률을 구하는 문제이다.
(2) 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\mathrm{P}(A)>0)$$

임을 이용하여 확률을 구한다.

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

여학생이 40명이고 남학생이 60명인 어느 학교 전체 학생을 대상으로 축구와 야구에 대한 선호도를 조사하였다. 이 학교 학생의 70 %가 축구를 선택하였으며, 나머지 30 %는 야구를 선택하였다. 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은? (단, 조사에서 모든 학생들은 축구와 야구 중 한 가지만 선택하였다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{5}{12}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{7}{12}$

출제 의도

주어진 상황에서 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

이 학교 학생 중 임의로 뽑은 1명이 여학생인 사건을 A, 야구를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.
주어진 조건으로부터

$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

이고 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{2}{5}$이다. 이때

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$

이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

26

▸ 21054-0266

1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적힌 30장의 카드 중 임의로 택한 한 장의 카드에 적힌 수가 짝수일 때, 이 수가 15 이하일 확률은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{4}{15}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{7}{15}$

27

▸ 21054-0267

민호는 흰 공 4개, 검은 공 1개를, 예린이는 흰 공 2개, 검은 공 3개를 가지고 있다. 이 10개의 공을 주머니에 모두 넣고 임의로 꺼낸 1개의 공이 흰 공이었을 때, 이 공이 민호가 가지고 있던 공일 확률은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

확률과 통계

28

▸ 21054-0268

주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 6개, 주머니 B에는 1, 3, 5가 하나씩 적힌 공 3개, 주머니 C에는 2, 4, 6이 하나씩 적힌 공 3개가 들어 있을 때, 다음과 같은 시행을 한다.

> [Ⅰ] 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 주머니 A에 넣는 시행을 3번 반복하여 꺼낸 공에 적힌 세 수의 곱을 구한다.
> [Ⅱ] [Ⅰ]에서 구한 세 수의 곱이 홀수이면 주머니 B에서, 짝수이면 주머니 C에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 숫자를 확인하고 다시 꺼낸 주머니에 넣는 시행을 2번 반복하여 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합을 구한다.

[Ⅱ]에서 구한 두 수의 합이 10일 때, 주머니 A에서 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 1일 확률은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{7}{45}$ ③ $\frac{8}{45}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

유형 9 확률의 곱셈정리

출제유형 | 확률의 곱셈정리를 이용하거나 두 사건의 독립과 종속을 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | (1) 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$
$$(P(A)>0,\ P(B)>0)$$

임을 이용한다.

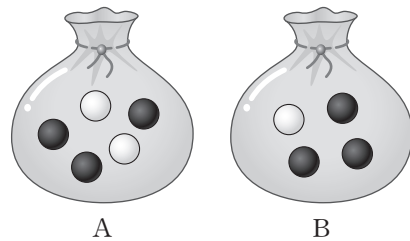
(2) 두 사건 A, B가 서로 독립일 때,

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

임을 이용한다.

필수 유형 | 2014학년도 대수능 |

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

출제 의도

확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

(i) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우
주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 있으므로 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우
주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 5개가 있으므로 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

답 ⑤

29

▸ 21054-0269

두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

30

▸ 21054-0270

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$가 이차방정식 $4ax^2-3x+a=0$의 두 근이고 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{8}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

31

▸ 21054-0271

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 4개, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 3개, 주머니 C에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 주머니 B에서, 검은 공이면 주머니 C에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 3개의 공이 흰 공 2개, 검은 공 1개일 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

32

▸ 21054-0272

주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 1개씩 공을 꺼내는 시행을 계속하여 3의 배수가 적힌 공을 모두 꺼내면 시행을 멈춘다. 5번째 시행 후 시행을 멈출 확률은?

(단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

33

▸ 21054-0273

한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3이라 하자. 이때 네 수 x_1, x_2, x_3, x_4를

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=a_n x_n(1-x_n)\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

으로 정의할 때, $x_4>0$일 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{7}{18}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

34

▸ 21054-0274

여학생 11명과 승진이를 포함한 남학생 12명 총 23명으로 이루어진 학급에서 대표 학생 4명을 다음과 같은 방법으로 선출하려고 한다.

(가) 먼저 23명 중 임의로 3명의 대표 학생을 선출한다.
(나) (가)에서 선출한 대표 학생 3명이 모두 남학생이면 나머지 한 명을 여학생 중에서 임의로 선출하고, 모두 여학생이면 나머지 한 명을 남학생 중에서 임의로 선출하고, 남학생과 여학생이 모두 있으면 나머지 20명 중에서 임의로 한 명을 선출한다.

선출된 4명의 대표 학생이 승진이와 여학생 3명일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 10 독립시행의 확률

출제유형 | 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

임을 이용한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수를 a라 하고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 b라 하자. $a-b$의 값이 3일 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

출제 의도

독립시행의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀 이

$0\le a\le 5$이고 $0\le b\le 4$이므로 $a-b$의 값이 3일 확률은 다음과 같은 세 가지 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) $a=5$, $b=2$인 경우

$${}_{5}\mathrm{C}_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\times{}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{3}{256}$$

(ii) $a=4$, $b=1$인 경우

$${}_{5}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{5}{128}$$

(iii) $a=3$, $b=0$인 경우

$${}_{5}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times{}_{4}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{5}{256}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a-b$의 값이 3일 확률은

$$\frac{3}{256}+\frac{5}{128}+\frac{5}{256}=\frac{9}{128}$$

따라서 $p=128$, $q=9$이므로

$p+q=128+9=137$

답 137

35

▸ 21054-0275

한 개의 주사위를 6번 던질 때 나오는 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{59}{64}$ ② $\frac{15}{16}$ ③ $\frac{61}{64}$
④ $\frac{31}{32}$ ⑤ $\frac{63}{64}$

36

▸ 21054-0276

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 200점을 얻고 뒷면이 나오면 100점을 잃는다. 한 개의 동전을 5번 던질 때 얻는 점수의 합이 700점 이상일 확률은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

37

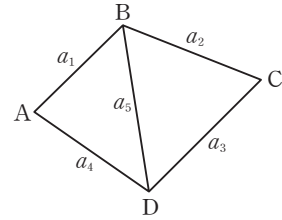
▸ 21054-0277

좌표평면 위의 점 P에 대하여 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, 적어도 한 개가 뒷면이 나오면 y축의 방향으로 1만큼 이동시킨다. 원점 O에 놓인 점 P에 대하여 두 개의 동전을 동시에 던져서 점 P를 이동시키는 시행을 5번 할 때, 선분 OP의 길이가 5일 확률은?

① $\frac{507}{1024}$ ② $\frac{255}{512}$ ③ $\frac{513}{1024}$
④ $\frac{129}{256}$ ⑤ $\frac{519}{1024}$

38

▸ 21054-0278

그림과 같이 네 점 A, B, C, D가 다섯 개의 선분 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5로 연결되어 있다.

한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같이 선분을 색칠한다.

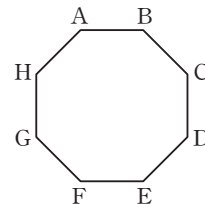
(가) n번째 나온 눈의 수가 2 이하이면 선분 a_n을 빨간색으로 색칠한다.
(나) n번째 나온 눈의 수가 3 이상이면 선분 a_n을 흰색으로 색칠한다.

한 개의 주사위를 5번 던진 후 점 A와 점 C가 빨간색으로 색칠된 선분을 따라 연결되어 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

39

▸ 21054-0279

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형이 있다. 정팔각형의 변 위를 움직이는 점 P는 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 시곗바늘이 도는 방향으로 1만큼 이동하고 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 1만큼 이동한다. 점 A에서 출발한 점 P에 대하여 한 개의 주사위를 10번 던진 후 다시 점 A에 위치하는 사건을 S, 10번의 이동 중 적어도 한 번 점 F에 위치한 적이 있는 사건을 T라 할 때, $\mathrm{P}(S\cap T)=\frac{4p}{3^9}$이다. p의 값을 구하시오.

09 통계

1 확률변수와 이산확률변수

(1) **확률변수** : 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수를 대응시킨 함수를 확률변수라고 한다.

(2) **이산확률변수** : 확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 일일이 셀 수 있을 때, X를 이산확률변수라고 한다.

(3) **확률분포와 확률질량함수** : 이산확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이고, X가 이들 값을 가질 확률이 각각 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n일 때, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n과 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라 하고, 이 대응 관계를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

이산확률변수 X의 확률분포를 다음과 같이 표로 나타낼 수 있다. (단, $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$)

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

(4) **확률질량함수의 성질** : 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

① $0\le p_i\le 1$

② $\sum_{i=1}^{n} p_i=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

③ $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, i, $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$이고 $i\le j$)

(5) **이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차**

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때

① 기댓값(평균) : $\mathrm{E}(X)=m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

② 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

(6) **확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차**

확률변수 X와 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

2 이항분포

(1) **이항분포** : 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\ (q=1-p,\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다. 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.

(2) **이항분포의 평균, 분산, 표준편차**

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

① $\mathrm{E}(X)=np$

② $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

③ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

3 연속확률변수의 확률분포

(1) **연속확률변수** : 길이, 무게, 온도 등과 같이 어떤 구간에 속하는 모든 실수를 값으로 가지는 확률변수 X를 연속확률변수라고 한다.

(2) **확률밀도함수** : $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$가 다음과 같은 성질을 가질 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

① $f(x) \ge 0$

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

③ 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

(단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

4 정규분포

(1) **정규분포** : 모든 실수의 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, σ $(\sigma > 0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ (x는 모든 실수, e는 2.718…인 무리수)

일 때, 확률변수 X의 확률분포를 정규분포라고 한다. 상수 m과 σ는 각각 확률변수 X의 평균과 표준편차임이 알려져 있다.
평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다.
이때 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 성질을 가진다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, x축을 점근선으로 갖는다.

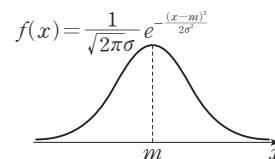
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

③ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족해진다.

④ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

(2) **표준정규분포** : 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(0, 1)$과 같이 나타낸다.

(3) **정규분포와 표준정규분포의 관계** : 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(4) **이항분포와 정규분포의 관계** : 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

5 모평균의 추정

(1) **표본평균** : 어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 X_1, X_2, X_3, …, X_n을 임의추출하였을 때,
$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$를 표본평균이라고 한다.

(2) **표본평균 $\overline{X}$의 성질** : 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) **모평균의 추정** : 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

참고 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 s를 사용할 수 있다는 것이 알려져 있다.

유형 1 이산확률변수의 확률분포

출제유형 | 이산확률변수의 뜻을 알고 확률을 구하거나 확률분포의 성질을 이해하여 해결하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때

(1) $0\le p_i\le 1$

(2) $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

필수 유형

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	$a+\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{P}(X\le 4)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

출제 의도

이산확률변수의 확률분포의 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+\left(a+\frac{1}{6}\right)=1$

$2a=\frac{1}{2}$

에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서

$\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$=\frac{7}{12}$

답 ②

01

▸ 21054-0280

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	b	1

$\mathrm{P}(X\le 2)=\frac{1}{2}$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

02

▸ 21054-0281

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 9이고

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{x(x+1)}\ (x=1, 2, 3, \cdots, 9)$$

가 성립할 때, $\mathrm{P}(X=5)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{1}{54}$ ② $\frac{1}{27}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{2}{27}$ ⑤ $\frac{5}{54}$

03

▸ 21054-0282

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 최댓값을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X\ge 5)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 2 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 이산확률변수의 확률분포를 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때

(1) 평균 : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

(2) 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

필수 유형 | 2012학년도 대수능 9월 모의평가 |

확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같다.

X	1	3	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	1

$\mathrm{E}(X)=5$일 때, b의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{19}{36}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{23}{36}$

출제 의도

이산확률변수의 확률분포를 이해하고 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

$a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b$

$=a+7b+\frac{3}{4}=5$

$a+7b=\frac{17}{4}$ …… ㉡

㉡−㉠에서 $6b=\frac{7}{2}$

따라서 $b=\frac{7}{12}$

답 ③

04

▸ 21054-0283

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$2a$	a	1

$\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

05

▸ 21054-0284

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	a	b	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{43}{12}$일 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

06
▸ 21054-0285

흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{15}{14}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{33}{28}$
④ $\frac{69}{56}$ ⑤ $\frac{9}{7}$

07
▸ 21054-0286

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

$\mathrm{V}(X)$의 최댓값은? (단, a, b는 실수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

08
▸ 21054-0287

주머니에 빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 한 개씩 3개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행을 3회 반복하여 꺼낸 세 공의 색이 모두 다르면 1점, 두 공의 색만 같으면 2점, 세 공의 색이 모두 같으면 4점을 얻는 게임을 할 때, 이 게임에서 얻은 점수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

09
▸ 21054-0288

상자에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드 10장이 들어 있다. 이 상자에서 카드를 임의로 한 장씩 꺼내어 적혀 있는 수를 더해 나갈 때 더한 수의 합이 7 이상이 될 때까지 꺼낸 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

유형 3 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

출제유형 | 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq 0)$에 대하여
(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

필수 유형 | 2016학년도 대수능 9월 모의평가 |

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-4	0	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(3X)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 의도

확률변수 X의 평균을 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

주어진 확률분포에서

$$\mathrm{E}(X)=(-4)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}$$
$$=4$$

이므로

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=3\times 4=12$

답 ⑤

10

▸ 21054-0289

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$2a$	$3a$	$6a$	1

$\mathrm{E}(3X+8)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

11

▸ 21054-0290

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(4X-3)=10$일 때, $\mathrm{V}(4X-3)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 91 ② 93 ③ 95
④ 97 ⑤ 99

12

▸ 21054-0291

다섯 개의 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 다섯 장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 문자 A, E가 적혀 있는 두 장의 카드 사이에 나열된 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(5X-2)$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35
④ 40 ⑤ 45

확률과 통계

유형 4 이항분포

출제유형 | 이항분포를 따르는 확률변수의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때

(1) $\mathrm{E}(X)=np$

(2) $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

(3) $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(80, p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=20$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오. [3점]

출제 의도

이항분포를 따르는 확률변수의 평균, 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(80, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=80\times p=20$

따라서

$p=\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=80\times p\times(1-p)\\&=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\\&=15\end{aligned}$$

답 15

13 ▸ 21054-0292

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X)=30$일 때, $\mathrm{V}(2X+5)$의 값은?

① 70 ② 80 ③ 90 ④ 100 ⑤ 110

14 ▸ 21054-0293

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{2}{3}\right)$를 따르고

$$12\times\mathrm{P}(X=k)=5\times\mathrm{P}(X=k+1)$$

일 때, 정수 k의 값은? (단, $0\le k\le 9$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15 ▸ 21054-0294

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 합이 10 이상이면 20점을 얻고 9 이하이면 3점을 잃는 게임이 있다. 이 게임을 60번 반복할 때 얻는 점수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

유형 5 연속확률변수

출제유형 | 연속확률변수의 뜻을 알고 확률밀도함수의 성질을 이용하여 미지수나 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 연속확률변수 X가 $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수를 값으로 갖고, X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때

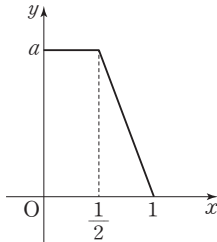
(1) $f(x) \ge 0$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

(단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

필수 유형 | 2017학년도 대수능 9월 모의평가 |

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 1$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

출제 의도

확률밀도함수의 성질을 이해하고 이를 이용하여 미지수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률밀도함수의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times a = 1$

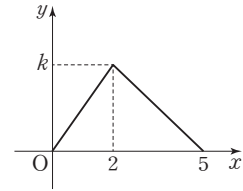
$\frac{3}{4}a = 1$에서

$a = \frac{4}{3}$

답 ③

16

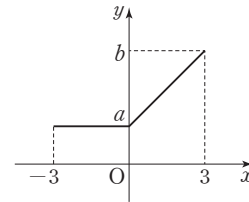
▸ 21054-0295

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 5$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

$\mathrm{P}(1 \le X \le 3)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{19}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

17

▸ 21054-0296

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-3 \le X \le 3$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.

$\mathrm{P}(-3 \le X \le 1) = \mathrm{P}(1 \le X \le 3)$일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

18

▸ 21054-0297

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-3 \le X \le 3$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 $-3 \le x \le 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시킨다. $\mathrm{P}(-1 \le X \le 3) = \frac{5}{8}$일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

유형 6 정규분포

출제유형 | 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 표준정규분포를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 $\frac{m}{3}$인 정규분포를 따르고

$$P\left(X \le \frac{9}{2}\right)=0.9987$$

일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

출제 의도

정규분포의 성질을 이용하여 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률변수 X가 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{m}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\frac{m}{3}}$

으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$P\left(X \le \frac{9}{2}\right)=P\left(Z \le \frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right)$$

$$=P\left(Z \le \frac{3(9-2m)}{2m}\right)$$

이고

$$P(Z \le 3)=0.5+P(0 \le Z \le 3)$$

$$=0.5+0.4987=0.9987$$

이므로

$$\frac{3(9-2m)}{2m}=3$$

$$9-2m=2m$$

따라서 $m=\frac{9}{4}$

답 ④

19

▸ 21054-0298

확률변수 X가 평균이 35, 표준편차가 4인 정규분포를 따를 때, $P(|X-35| \ge 2)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0456 ② 0.1336 ③ 0.3174 ④ 0.4672 ⑤ 0.6170

20

▸ 21054-0299

확률변수 X가 평균이 24, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 $P(X \ge 27)=0.0668$을 만족시킨다. $P(X \le 26)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8185 ③ 0.8413 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

21

▸ 21054-0300

확률변수 X가 평균이 m이고 표준편차가 10인 정규분포를 따를 때, $P(X \le k)=0.1587$이다. $P(X \ge k+5)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, k는 상수이다.)

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.4332 ② 0.4772 ③ 0.6915
④ 0.8413 ⑤ 0.9332

22

▸ 21054-0301

확률변수 X가 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때 $F(x)=P(X \le x)$라 하자. 두 실수 a, b가

$F(a)+F(b)=1$

$F(a)-F(b)=0.3830$

을 만족시킬 때, $F(2a-b)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.8664
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

유형 7 정규분포의 활용

출제유형 | 실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균이 m이고 표준편차가 σ일 때, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포를 따르는 확률변수임을 이용하여 문제를 해결한다.

필수 유형 | 2020학년도 대수능 |

어느 농장에서 수확하는 파프리카 1개의 무게는 평균이 180 g, 표준편차가 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 수확한 파프리카 중에서 임의로 선택한 파프리카 1개의 무게가 190 g 이상이고 210 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0440 ② 0.0919 ③ 0.1359
④ 0.1498 ⑤ 0.2417

출제 의도

실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이 농장에서 수확한 파프리카 중에서 임의로 선택한 파프리카 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(180, 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-180}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(190 \le X \le 210)$

$=P\left(\frac{190-180}{20} \le Z \le \frac{210-180}{20}\right)$

$=P(0.5 \le Z \le 1.5)$

$=P(0 \le Z \le 1.5)-P(0 \le Z \le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

답 ⑤

확률과 통계

23

▸ 21054-0302

어느 고등학교 학생이 하루에 음악을 듣는 시간은 평균이 68분, 표준편차가 16분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 임의로 택한 1명이 하루에 음악을 듣는 시간이 100분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.3413

24

▸ 21054-0303

어느 인터넷 학습 사이트에 가입한 학생이 1주일 동안 학습한 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 4시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 인터넷 학습 사이트에 가입한 학생 중 임의로 택한 1명이 1주일 동안 학습한 시간이 16시간 이상일 확률이 0.8413일 때, 1주일 동안 학습한 시간이 26시간 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.3185

25

▸ 21054-0304

자동차 부품을 생산하는 한 공장의 A라인에서 생산하는 부품의 무게는 평균이 64 g, 표준편차가 8 g인 정규분포를 따르고, B라인에서 생산하는 부품의 무게는 평균이 68 g, 표준편차가 6 g인 정규분포를 따른다고 한다. A라인에서 생산하는 부품 중 임의로 택한 부품 1개의 무게가 70 g 이하일 확률과 B라인에서 생산하는 부품 중 임의로 택한 부품 1개의 무게가 k g 이상일 확률이 같을 때, 상수 k의 값은?

① 63 ② 63.5 ③ 64
④ 64.5 ⑤ 65

26

▸ 21054-0305

A과수원에서 생산된 사과 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, B과수원에서 생산된 사과 1개의 무게는 평균이 $m-5$, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 두 과수원에서 생산된 사과 중 무게가 200 이상인 사과를 선물용으로 분류한다. A과수원에서 생산된 사과 중 선물용으로 분류된 사과는 31 %이고, B과수원에서 생산된 사과 중 선물용으로 분류된 사과는 23 %일 때, $m+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
0.75	0.27
1.00	0.34

① 210 ② 215 ③ 220
④ 225 ⑤ 230

27

▸ 21054-0306

어느 회사의 신입사원 선발시험의 점수는 평균이 77점, 표준편차가 5점인 정규분포를 따르고, 선발시험의 점수가 80점 이상이면 1차 합격을 한다. 이 회사의 신입사원 선발시험에 응시한 지원자 중 임의로 택한 1명이 선발시험에서 1차 합격했을 때, 이 지원자의 점수가 83점 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34
1.2	0.38

① $\dfrac{4}{9}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{5}{9}$
④ $\dfrac{11}{18}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

유형 8 이항분포와 정규분포의 관계

출제유형 | 이항분포에서 시행 횟수가 충분히 클 때, 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고 n이 충분히 클 때, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

필수 유형

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합이 10 이상인 사건을 A라 하자. 두 개의 주사위를 던지는 시행을 720번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수가 100 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0290
④ 0.0668 ⑤ 0.1587

출제 의도

이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

두 개의 주사위를 던져서 사건 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

이므로 두 개의 주사위를 던지는 시행을 720번 반복할 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포

$\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$

$\mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$

이고 시행 횟수 720은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 100)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{100-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ②

28

▸ 21054-0307

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{4}{5}\right)$를 따를 때, $\mathrm{P}(304\le X\le 332)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6826 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

29

▸ 21054-0308

승현이는 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 20점을 얻고, 뒷면이 나오면 점수를 얻지 못하는 게임을 한다. 이 게임에서 승현이가 동전을 400번 던져서 3700점 이상을 얻을 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.8664
④ 0.9332 ⑤ 0.9542

30

▸ 21054-0309

흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 흰 공이 2개 이상 나오는 사건을 A라 하자. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 다시 공을 주머니에 넣는 시행을 900번 반복할 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\sum_{k=702}^{744}\mathrm{P}(X=k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6587 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8664 ⑤ 0.9104

유형 9 표본평균의 확률분포

출제유형 | 모집단의 확률분포와 표본평균의 확률분포 사이의 관계를 이해하고 표본평균의 확률이나 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m$

(2) $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

필수 유형 | 2019학년도 대수능 9월 모의평가 |

어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	a	b	1

$E(X^2)=\dfrac{16}{3}$일 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 20인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $V(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{60}$ ② $\dfrac{1}{30}$ ③ $\dfrac{1}{20}$
④ $\dfrac{1}{15}$ ⑤ $\dfrac{1}{12}$

출제 의도

모집단의 확률분포와 표본평균의 확률분포 사이의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{6}+a+b=1$, 즉 $a+b=\dfrac{5}{6}$ …… ㉠

$E(X^2)=\dfrac{16}{3}$이므로

$E(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=4a+16b=\dfrac{16}{3}$

$a+4b=\dfrac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{6}$

이때 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{2}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=2$,

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{16}{3}-2^2=\dfrac{4}{3}$

이고 이 모집단에서 임의추출한 크기가 20인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{20}=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{15}$

답 ④

31

▸ 21054-0310

모평균이 12, 모표준편차가 4인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $E(\overline{X}^2)=146$일 때, n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

32

▸ 21054-0311

어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-3	-1	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	a	b	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $E(12\overline{X}+3)=12$일 때, $V(12\overline{X}+3)$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 71 ② 73 ③ 75
④ 77 ⑤ 79

33

▸ 21054-0312

모평균이 2, 모표준편차가 1인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $P(\overline{X}\ge k)=0.1587$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{15}{8}$ ③ 2
④ $\dfrac{17}{8}$ ⑤ $\dfrac{9}{4}$

유형 10 표본평균의 활용

출제유형 | 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 이용하여 확률을 구한다.

필수 유형 | 2018학년도 대수능 |

어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 201.5 g이고 표준편차가 1.8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

출제 의도

모집단이 정규분포를 따를 때 표본평균의 확률분포를 이해하고 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

이 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 1.8^2)$을 따른다.
이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=201.5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1.8^2}{9}=0.6^2$이고 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 0.6^2)$을 따른다. $Z=\frac{\overline{X}-201.5}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 200)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{200-201.5}{0.6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+0.5\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+0.5\\&=0.4938+0.5\\&=0.9938\end{aligned}$$

답 ⑤

34

▶ 21054-0313

어느 카페의 손님이 카페에 머무는 시간은 평균이 52분이고 표준편차가 8분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 카페의 손님 중 임의추출한 16명이 카페에 머무는 시간의 평균이 54분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.1915 ⑤ 0.3085

35

▶ 21054-0314

어느 공장에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 34 g이고 표준편차가 4 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 초콜릿 4개를 한 상자에 담아 상품으로 판매한다. 이 공장에서 생산하는 초콜릿 상자 중에서 임의로 택한 초콜릿 한 상자의 무게가 124 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 고려하지 않는다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.1915 ⑤ 0.3085

36

▶ 21054-0315

어느 제과점에서 만든 빵 한 개의 무게는 평균이 m이고 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 빵 중 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 4)\ge 0.95$가 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

유형 11 모평균의 추정

출제유형 | 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

출제유형잡기 | 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

필수 유형 | 2020학년도 대수능 9월 모의평가 |

어느 음식점을 방문한 고객의 주문 대기 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 음식점을 방문한 고객 중 64명을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 음식점을 방문한 고객의 주문 대기 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a\le m\le b$이다. $b-a=4.9$일 때, σ의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

출제 의도

정규분포를 따르는 모집단에서 얻은 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

음식점을 방문한 고객 중 64명을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{8}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{8}$$

즉, $a=\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{8}$, $b=\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{8}$이므로

$$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{8}=0.49\sigma=4.9$$

따라서 $\sigma=\frac{4.9}{0.49}=10$

답 10

37 ▸ 21054-0316

어느 분식점에서 만드는 김밥 한 줄의 무게는 평균이 m, 표준편차가 15인 정규분포를 따른다고 한다. 이 분식점에서 만든 김밥 중 36줄을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 분식점에서 만드는 김밥 한 줄의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a\le m\le b$이다. $b-a$의 값은?
(단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 9.2 ② 9.4 ③ 9.6
④ 9.8 ⑤ 10

38 ▸ 21054-0317

어느 양계장에서 생산되는 계란 1개의 무게는 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 양계장에서 생산된 계란 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 양계장에서 생산되는 계란 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면 $a\le m\le b$이다. $b-a\le2$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 158 ② 161 ③ 164
④ 167 ⑤ 170

39 ▸ 21054-0318

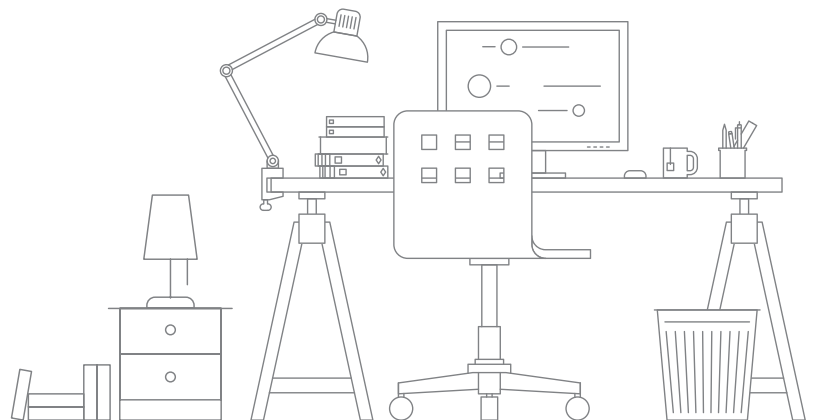
모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다. 또 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이다. $b-a\ge4.3(d-c)$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le2.58)=0.99$로 계산한다.)

이 책의 **차례**

CONTENTS

실전편

실전 모의고사 1회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▸ 21054-1001

$(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

02

▸ 21054-1002

함수 $f(x)=2x^3+4x^2-1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

03

▸ 21054-1003

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x\le 1) \\ 4x+a & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04

▸ 21054-1004

좌표평면에서 시초선을 원점에서 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 원이 만나는 점의 좌표가 $(2,\ a)$이다. $\tan\theta=-2$일 때, $\dfrac{a}{\cos\theta}$의 값은? [3점]

① $-4\sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

05

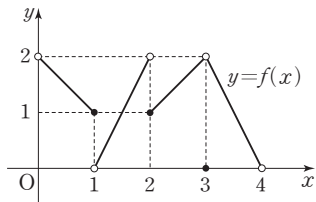
▸ 21054-1005

세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2 (b+1)$이 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값은? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

06

▸ 21054-1006

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) + f(3)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

07

▸ 21054-1007

양의 실수 k에 대하여 k의 제곱근 중 양의 실수인 것을 a라 할 때, a보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $f(k)$라 하자. 또한 양의 실수 k에 대하여 k의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, b보다 큰 정수 중에서 가장 작은 값을 $g(k)$라 하자. 예를 들어 $k=4$일 때, $a=2$이므로 $f(4)=3$이고 $b=\sqrt[3]{4}$이므로 $g(4)=2$이다. $(f \circ g)(k)=2$를 만족시키는 모든 k의 값의 범위는 $\alpha < k < \beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 25 ② 26 ③ 27
④ 28 ⑤ 29

08

▸ 21054-1008

다항함수 $f(x)$가 상수 a $(a>0)$과 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^3+2x^2-x-2$$

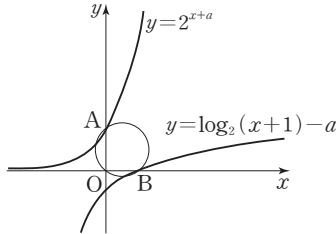
를 만족시킨다. $a+f(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

09

▸ 21054-1009

그림과 같이 양수 a에 대하여 곡선 $y=2^{x+a}$이 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_2(x+1)-a$가 x축과 만나는 점을 B라 하자. 세 점 A, B, O를 지나는 원의 넓이가 $\frac{13}{4}\pi$일 때, a의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]

① 1　② $\log_2 3$　③ 2

④ $\log_2 5$　⑤ $\log_2 6$

10

▸ 21054-1010

양수 k에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(k)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$

① 11　② 12　③ 13

④ 14　⑤ 15

11

▸ 21054-1011

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$　…… (*)

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=3a_2-S_1$

$=3a_2-a_1$

$=3\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=4$

(우변)$=4$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

((가))$a_{k+1}-S_{k+1}=k+3$　…… ㉠

$a_{k+1}=a_{k+2}-$ (나) 이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=$ (다)

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$라 할 때, $\frac{f(12)\times g(2)}{h(2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ 2　⑤ 4

12

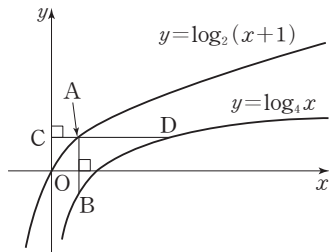
▸ 21054-1012

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=6$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 점 $(1, f(1))$에서 최솟값 -1을 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선 중 기울기가 -1인 직선이 점 $(-10, a)$를 지날 때, a의 값은? [4점]

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18

13

▸ 21054-1013

그림과 같이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 A의 x좌표는 1보다 작은 양수이다. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축, 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 AB의 길이가 자연수 k일 때 세 점 A, C, D를 각각 A_k, C_k, D_k라 하자. k의 최솟값을 l이라 할 때, $\sum_{k=l}^{l+9} \frac{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k}}{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}}$의 값은? [4점]

① $\frac{2^{20}-4}{3}$　② $\frac{2^{22}-16}{3}$　③ $\frac{2^{22}-4}{3}$　④ $\frac{2^{24}-16}{3}$　⑤ $\frac{2^{24}-4}{3}$

14

▸ 21054-1014

자연수 n에 대하여 $0 \le x < \pi$일 때, 방정식

$$\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2nx=0$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{12} a_k$의 값은? [4점]

① 31π　② 33π　③ 35π　④ 37π　⑤ 39π

15

▸ 21054-1015

실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$라 하자. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $g(a)$, $h(a)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $g(2)=11$

ㄴ. 함수 $g(a)$의 최솟값은 $\frac{9}{16}$이다.

ㄷ. $h\left(-\frac{1}{2}\right)+h(1)=\frac{25}{4}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16
▸ 21054-1016

$\int_0^1 (4x^3+6x^2+5)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

17
▸ 21054-1017

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$a_1=1,\ S_{n+2}-S_n=3a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. $S_{10}=150$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

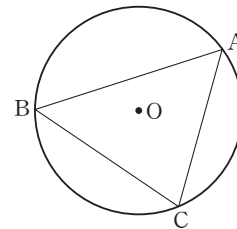
18
▸ 21054-1018

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=2t^3-2t^2$$

이다. 점 P가 원점을 출발 후 운동 방향을 바꾸는 시각 t에서 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

19
▸ 21054-1019

그림과 같이 중심이 O인 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 놓여 있고, 점 O와 변 AB 사이의 거리와 점 O와 변 AC 사이의 거리의 비는 1 : 2이다. $\overline{AB}=8\sqrt{2}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\sin^2 B=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 삼각형 ABC의 내부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

20

▸ 21054-1020

두 정수 p, q에 대하여 삼차방정식
$x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, $10p+q$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1021

다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 자연수 p의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a_1=1$, $a_{18}=32$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n \le p) \\ \log_2 a_n & (a_n > p) \end{cases}$$
이다.

22

▸ 21054-1022

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다.
(나) $g'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$
(다) 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$을 갖는다.

$f(1)+g(1)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

확률과 통계

23

▸ 21054-1023

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$일 때, $\mathrm{E}(3X-12)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

24

▸ 21054-1024

$\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 74　② 76　③ 78　④ 80　⑤ 82

25

▸ 21054-1025

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cup B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{2}{3}$

26

▸ 21054-1026

어느 서점에 진열되어 있는 책 한 권의 두께는 평균이 3 cm, 표준편차가 0.4 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 서점에 진열되어 있는 책 중에서 임의로 선택한 책 한 권의 두께가 2.6 cm 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8413　② 0.8664　③ 0.9332　④ 0.9544　⑤ 0.9938

27
▸ 21054-1027

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 1이 2보다 왼쪽에 나열되는 홀수인 자연수의 개수는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

28
▸ 21054-1028

어느 회사의 전체 사원 60명에게 우산 60개를 각각 한 개씩 나누어 주었다. 이 회사의 전체 사원 중 여자 사원은 36명이고, 나누어 준 60개의 우산 중 빨간색이 40개, 파란색이 20개이다. 이 회사의 사원 중 임의로 선택한 한 명이 파란색 우산을 받았을 때, 그 사원이 남자 사원일 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 이 회사의 사원 중 임의로 선택한 한 명이 빨간색 우산을 받았을 때, 그 사원이 여자 사원일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{13}{20}$ ③ $\frac{7}{10}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

단답형

29
▸ 21054-1029

어느 육상대회 400 m 달리기 경기에 참가한 선수들의 기록은 평균이 m초, 표준편차가 8초인 정규분포를 따른다고 한다. 이 육상대회 400 m 달리기 경기에 참가한 선수 중 n명을 임의추출하여 얻은 기록의 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이
$46.88 \le m \le 49.12$이다. $\overline{x}+n$의 값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

30
▸ 21054-1030

숫자 1이 적힌 카드가 3장, 숫자 2와 숫자 3이 적힌 카드가 각각 2장씩, 숫자 4와 숫자 5가 적힌 카드가 각각 1장씩 모두 9장의 카드가 있다. 이 9장의 카드에서 4장의 카드를 동시에 선택할 때, 선택한 카드에 적힌 숫자가 서로 다른 두 가지 종류이면 선택한 카드에 적혀 있는 한 숫자와 같은 숫자가 적힌 1장의 카드를 새로 포함시키고, 선택한 카드에 적힌 숫자가 서로 다른 세 가지 종류 이상이면 선택한 카드에 적힌 숫자와 다른 숫자가 적힌 1장의 카드를 새로 포함시킨다. 이 5장의 카드를 모두 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 N이라 할 때, $\frac{N}{10}$의 값을 구하시오. (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 새로 포함되는 카드는 처음에 주어진 카드가 아니고 그 카드에 적힌 숫자는 5 이하의 자연수이다.) [4점]

실전 모의고사 2회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▸ 21054-1031

$\sqrt[3]{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}$
④ 2 ⑤ 4

02

▸ 21054-1032

$\int_{-2}^{2} (3x^2-2x+1)\,dx$의 값은? [2점]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

03

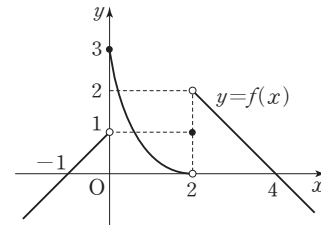
▸ 21054-1033

$\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=8$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (3a_k-b_k)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04

▸ 21054-1034

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

05

▸ 21054-1035

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x=2$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π
④ 2π ⑤ 4π

06

▸ 21054-1036

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 위치가 각각

$$f(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-1,\ g(t)=3t^2-3t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도의 합은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

07

▸ 21054-1037

방정식 $(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}} x-8=0$의 서로 다른 모든 실근의 곱은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

08

▸ 21054-1038

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=1$일 때,

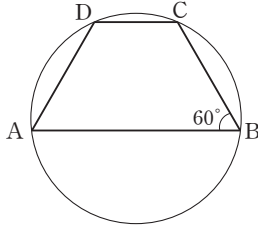
$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$의 값은? [3점]

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

09
▸ 21054-1039

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\angle ABC=60^\circ$

일 때, $\overline{AD}+R^2$의 값은? [4점]

① 9 ② $\frac{28}{3}$ ③ $\frac{29}{3}$

④ 10 ⑤ $\frac{31}{3}$

10
▸ 21054-1040

함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<1 \text{ 또는 } x>2) \\ 3x-4 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를

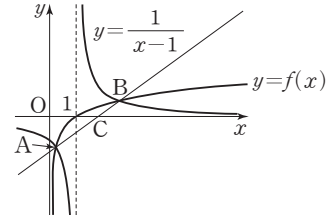
$g(x)=f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 n이고 실수 a의 최댓값은 m이다. $n+m$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

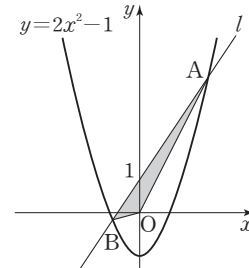
11
▸ 21054-1041

그림과 같이 좌표평면에서 함수 $f(x)=\log_p x$ $(p>1)$의 그래프와 곡선 $y=\frac{1}{x-1}$이 만나는 두 점을 각각 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ $(a<b)$라 하고, 직선 AB가 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=2$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-1+\sqrt{3}$

④ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

12
▸ 21054-1042

그림과 같이 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 a인 직선 l이 곡선 $y=2x^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABO의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a+1}$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

13

▸ 21054-1043

모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} k^5,\ b_n=\sum_{k=1}^{n} k^7$$

을 각각 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4 \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$, (우변)$=\frac{1}{8}\times 2^4=2$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$a_m+b_m=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4$$

이다. $n=m+1$일 때

$a_{m+1}+b_{m+1}$

$=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4+$ (가)

$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+($ (나) $)\times\{(m+2)^2+m^2\}]$

$=\frac{1}{8}\{$ (다) $\}^4$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$$

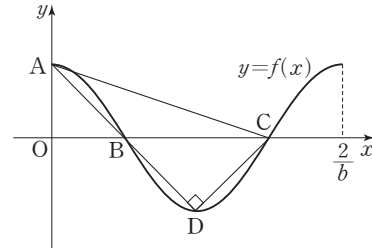
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(1)+g(3)+h(5)$의 값은? [4점]

① 210　② 212　③ 214　④ 216　⑤ 218

14

▸ 21054-1044

그림과 같이 두 상수 a, b $(a>0,\ b>0)$에 대하여 함수 $f(x)=a\cos b\pi x\left(0\le x\le\frac{2}{b}\right)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점부터 차례로 B, C, 직선 AB와 만나는 점 중 두 점 A, B가 아닌 점을 D라 하자. $\angle ADC=90°$이고, 삼각형 ADC의 넓이가 18일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{3}$　② $\frac{17}{6}$　③ 3　④ $\frac{19}{6}$　⑤ $\frac{10}{3}$

15

▸ 21054-1045

실수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^2(x-t)^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $t\neq 0$이면 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다.

ㄴ. $\lim_{t\to a-} g(t)<\lim_{t\to a+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

ㄷ. 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16

▸ 21054-1046

함수 $f(x)=x^2+4x+3$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)dx$$

라 하자. $g(0)=3$일 때, $g(3)$의 값을 구하시오. [3점]

17

▸ 21054-1047

$-2\le x\le 2$에서 함수

$$f(x)=4^x-2^{x+2}+3$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값을 구하시오. [3점]

18

▸ 21054-1048

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10이고 모든 자연수 n에 대하여

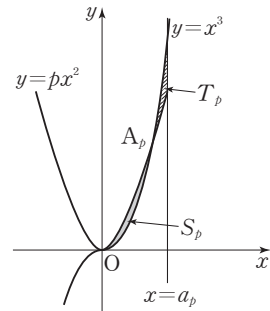
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (\log_2 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \\ \log_2 a_n & (\log_2 a_n\text{이 자연수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

19

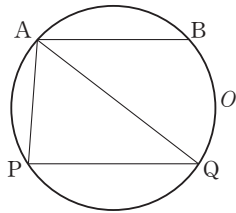
▸ 21054-1049

그림과 같이 양의 실수 p에 대하여 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$은 제1사분면 위의 점 A_p에서 만난다. 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$으로 둘러싸인 색칠한 부분의 넓이 S_p와 두 곡선 $y=x^3$, $y=px^2$과 직선 $x=a_p$로 둘러싸인 빗금친 부분의 넓이 T_p가 서로 같을 때, $\lim_{p\to\infty}\frac{6a_p}{p+1}$의 값을 구하시오.

(단, a_p의 값은 점 A_p의 x좌표보다 크다.) [3점]

20

▸ 21054-1050

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O에서 현 AB의 길이는 $2\sqrt{5}$이다. 직선 AB와 평행한 직선이 원 O와 두 점에서 만날 때 만나는 두 점을 P, Q라 하면 삼각형 APQ의 넓이는 $\overline{PQ}=a$에서 최댓값을 가진다. $a^2=m+2\sqrt{n}$일 때, 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

(단, 직선 PQ는 직선 AB가 아니다.) [4점]

21

▸ 21054-1051

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
(나) $a_{20}=32$

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

22

▸ 21054-1052

$f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g_n(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ f(1) & (1\le x<2) \\ f(x-1) & (2\le x<3) \\ f(2) & (3\le x<4) \\ f(x-2) & (4\le x<5) \\ \vdots & \quad\vdots \\ f(n) & (2n-1\le x<2n) \\ f(x-n) & (x\ge 2n) \end{cases}$$

함수 $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립할 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g_n(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n=a_{n+p}$일 때, 수열 $\{b_n\}$이 등차수열을 이루게 하는 자연수 p의 최솟값은 5이다.
(나) $\int_0^{q+1} g_6(x)\,dx=\int_0^{q} g_5(x)\,dx$를 만족시키는 자연수 q의 최솟값은 11이다.
(다) $\int_0^{20} g_6(x)\,dx-\int_0^{14} f(x)\,dx=21$

5지선다형

확률과 통계

23
▸ 21054-1053

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a	1

$\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

24
▸ 21054-1054

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수가 12일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

25
▸ 21054-1055

다섯 개의 숫자 1, 1, 2, 3, 4를 모두 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만들 때, 30000보다 작은 짝수인 자연수의 개수는? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

26
▸ 21054-1056

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

27

▸ 21054-1057

모평균이 60, 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(58 \le \overline{X} \le 63)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

28

▸ 21054-1058

A지역에서 생산되는 감자 1개의 무게는 평균이 150 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따르고, B지역에서 생산되는 감자 1개의 무게는 평균이 156 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. A지역에서 생산되는 감자 중 임의로 선택한 감자 1개의 무게가 142 g 이상일 확률과 B지역에서 생산되는 감자 중 임의로 선택한 감자 1개의 무게가 k g 이하일 확률이 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 166 ② 168 ③ 170
④ 172 ⑤ 174

단답형

29

▸ 21054-1059

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \longrightarrow Y$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(2)f(3)=16$
(나) 집합 X의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a) \le f(b)$이다.

30

▸ 21054-1060

두 사람 A, B가 가위바위보를 하여 그 결과에 따라 수직선 위의 점 P를 이동시키는 게임을 한다. 두 사람 A, B가 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이고 자연수 k에 대하여 k번째의 가위바위보에서 A가 이긴 경우 점 P를 양의 방향으로 $\frac{1}{2^k}$만큼 이동시키고, B가 이긴 경우 점 P를 음의 방향으로 $\frac{1}{2^k}$만큼 이동시킨다. 두 사람 A, B가 비긴 경우는 점 P를 이동시키지 않는다. 처음에 점 P가 수직선 위의 원점에 놓여 있을 때 자연수 n에 대하여 두 사람이 n번 가위바위보를 하여 이동한 점 P의 좌표를 x_n이라 하자. $x_5 > \frac{1}{4}$일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

실전 모의고사 3회

제한시간 100분 | 배점 100점

5지선다형

01

▸ 21054-1061

$\sqrt[5]{16}\times\sqrt[10]{8}$의 값은? [2점]

① 2　② $2^{\frac{11}{10}}$　③ $2^{\frac{6}{5}}$

④ $2^{\frac{13}{10}}$　⑤ $2^{\frac{7}{5}}$

02

▸ 21054-1062

$\int_0^1 x^3(a-x^2)\,dx=\frac{5}{12}$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$

④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

03

▸ 21054-1063

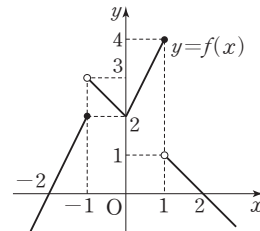
함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프가 점 $(1,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 4　② 8　③ 12

④ 16　⑤ 20

04

▸ 21054-1064

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5

④ 6　⑤ 7

05

▸ 21054-1065

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{8}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{6}{5}$
④ -1 ⑤ $-\frac{4}{5}$

06

▸ 21054-1066

다항함수 $f(x)$와 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+1)f(x)-4x^3-6x^2$$

을 만족시킬 때, $f'(-1)$의 값은? [3점]

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

07

▸ 21054-1067

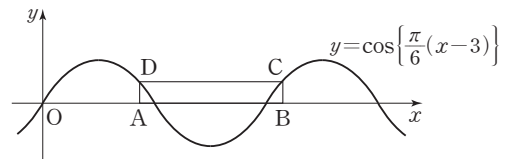
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이다. 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x좌표가 1인 점에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

08

▸ 21054-1068

그림과 같이 두 점 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$이 x축 위에 있고 두 점 C, D가 함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$의 그래프 위에 있는 직사각형 ABCD가 있다. $\overline{AB}=8$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이는?

(단, $3<x_1<6$, $12<x_2<15$) [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

09

▸ 21054-1069

함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+a & (x<b)\\ 2x & (x\geq b)\end{cases}$$

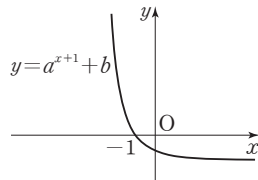
가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 최댓값은?

(단, a, b는 실수이다.) [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

10

▸ 21054-1070

좌표평면 위에서 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\log_a(bx)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은? (단, $a>0$, $a\neq1$, b는 상수이다.) [4점]

①

②

③

④

⑤

11

▸ 21054-1071

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하였더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

12

▸ 21054-1072

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{5}{3},\ \int_0^1 xf(x)\,dx=0$$

일 때, $\int_0^1 \{f(x)-2ax+a^2\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

13

▸ 21054-1073

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_n=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}\ (n\geq2)$$

가 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

(단, $3S_n+1\neq0$, $S_n\neq0$)

> 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}$ …… ㉠
>
> 이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}$, 즉
>
> $(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3S_n^2$
>
> $(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$
>
> 이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+$ (가), $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.
>
> 이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 (가) 인 등차수열이다.
>
> 그러므로 $S_n=$ (나)
>
> ㉠에서 $a_n=$ (다) $(n\geq2)$
>
> 따라서 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \text{(다)} & (n\geq2)\end{cases}$

위의 (가)에 알맞은 수를 k, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $kf(3)g(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{17}{100}$ ③ $\frac{9}{50}$
④ $\frac{19}{100}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

14

▸ 21054-1074

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 원점 O를 동시에 출발하여 시각 $t\ (t\geq0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=4t^2-6at-a^2,\ v_2(t)=t^2+6at-10a^2$$

이고, t초 후 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.) [4점]

보기

ㄱ. $f(t)=t(t-3a)^2$이다.
ㄴ. $a=2$일 때, $0\leq t\leq3$에서 $f(t)$의 최댓값은 32이다.
ㄷ. $0\leq t\leq3$에서 $f(t)$의 최댓값을 $g(a)$라 할 때, $y=g(a)$의 최솟값은 $\frac{27}{16}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▸ 21054-1075

자연수 n과 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}n^2-2n+2 & (n\leq20)\\ 3n & (n\geq21)\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_{3k-2}+\sum_{k=7}^{15}ka_{3k}$의 값은? [4점]

① -1727 ② -1729 ③ -1731
④ -1733 ⑤ -1735

단답형

16
▸ 21054-1076

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=5,\ a_7+a_8=37$$

일 때, $a_n<30$을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

17
▸ 21054-1077

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

두 극한값 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}$, $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{g(x)-3}{2x-4}$이 모두 존재하고

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $\dfrac{h'(2)}{f'(2)}=a$를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

18
▸ 21054-1078

2 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$$4^{2x}>\sqrt[n]{8}\times 4^{x}$$

의 해가 $x>\dfrac{1}{6}$이 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

19
▸ 21054-1079

삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=(x+2)(x-5)$이다. 함수 $f(x)+ax$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 자연수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

20

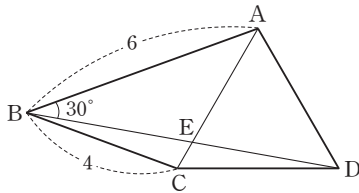
▸ 21054-1080

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$을 각각 $b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$, $c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이고 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17일 때, $a_3+a_7=k$이다. $5k$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1081

그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\angle ABE=30°$이고 삼각형 ACD가 정삼각형일 때, 삼각형 AED의 외접원의 지름의 길이는 $\dfrac{q(\sqrt{21}-3)}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22

▸ 21054-1082

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.
(나) 방정식 $f(x)=-k\ (5<k<6)$은 중근을 가진다.

자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n=\{\alpha\,|\,\alpha\text{는 함수 } |f(x)+n|\text{의 극댓값}\}$$

이라 하자. 집합 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 17이 되도록 하는 상수 k에 대하여 $100k$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

확률과 통계

23

▸ 21054-1083

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(80,\ p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X)=60$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

24

▸ 21054-1084

두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

25

▸ 21054-1085

다항식 $(1+ax)(x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 55일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26

▸ 21054-1086

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르고, $\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 16)$이 성립할 때, $\mathrm{P}(9\le X\le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

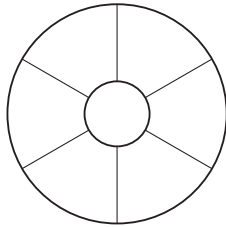
z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247
③ 0.6687 ④ 0.7745
⑤ 0.8185

27

▸ 21054-1087

그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 서로 다른 두 개의 원으로 둘러싸인 부분을 6등분한 도형이 있다. 이 도형에서 가운데 작은 원을 제외한 6개의 영역에 빨간색, 파란색, 노란색을 포함한 서로 다른 6가지 색을 한 번씩 모두 사용하여 한 영역에 한 가지 색만 칠할 때, 빨간색, 파란색, 노란색 중에서 적어도 두 가지 색이 서로 인접하도록 칠하는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108

28

▸ 21054-1088

어느 과수원에서 생산하는 복숭아 1개의 무게는 평균이 302 g, 표준편차가 16 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서는 임의로 선택한 복숭아 16개를 한 상자에 담아 판매한다. 판매되는 상자 중 임의로 선택한 한 상자에 담긴 복숭아의 무게의 합이 4960 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 고려하지 않는다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0290 ④ 0.0668 ⑤ 0.1587

단답형

29

▸ 21054-1089

흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니 A가 있고, 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니 B가 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내고 주머니 A에 남은 공 3개를 모두 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼낸다. 주머니 B에서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 때, 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30

▸ 21054-1090

11에서 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 한 장의 카드를 택하여 택한 카드에 적힌 수를 확인하는 시행을 한다. 이 시행을 세 번 반복한 결과로 얻은 세 수를 차례로 a, b, c라 할 때, 세 수 a, b, c의 일의 자리의 수의 합이 3으로 나누어떨어지는 경우의 수를 구하시오. [4점]

5지선다형

01

▸ 21054-1091

$\sqrt[8]{3^7}\times\sqrt{3^{\frac{9}{4}}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$ ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

02

▸ 21054-1092

$\int_0^1 (4x^3-3ax^2+4)\,dx=2$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03

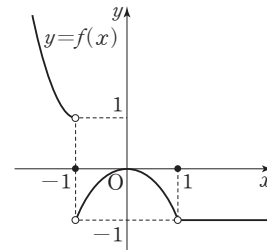
▸ 21054-1093

함수 $y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

04

▸ 21054-1094

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to-1-}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

05
▸ 21054-1095

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\frac{1}{3-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{2+\sqrt{2}}{3}$
④ $-\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

06
▸ 21054-1096

다항함수 $f(x)$가

$$\frac{d}{dx}\int f'(x)\,dx=3x^2+2ax,\ f(2)-f(1)=19$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

07
▸ 21054-1097

10 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+b & (x\le a)\\ 2x^2-3b & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

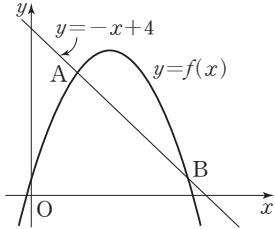
08
▸ 21054-1098

함수 $y=8\sin\left\{\frac{\pi}{6}(x+7)\right\}$ $(0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=4\sqrt{3}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표의 합은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

09
▸ 21054-1099

그림과 같이 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+4$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기가 3일 때, 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는?

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① -3　② -4　③ -5
④ -6　⑤ -7

10
▸ 21054-1100

$\log 2\times\log 5=a$일 때,

$$(\log 25)^4-(\log 4)^4=p(1-2a)\sqrt{1-qa}$$

이다. 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, $0<qa<1$) [4점]

① 16　② 18　③ 20
④ 22　⑤ 24

11
▸ 21054-1101

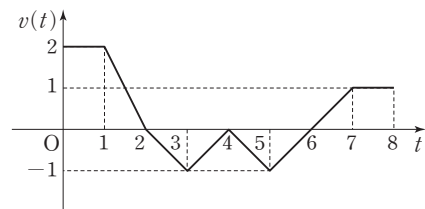
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_3=3$, $b_2=6$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+2}-b_n=b_{n+3}-b_{n+1}$$
> 이다.

$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1}-b_{k+1})=48$일 때, $\sum_{k=1}^{8}(a_{2k}-b_{2k+1})$의 값은? [4점]

① 118　② 120　③ 122
④ 124　⑤ 126

12
▸ 21054-1102

수직선 위에서 좌표가 1인 점 A를 출발하여 8초 동안 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, 점 P가 출발 후 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지날 때까지 실제로 움직인 거리는? [4점]

① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

13

▸ 21054-1103

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $3S_n=(n+2)a_n$이 성립할 때, $a_n=pn^2+qn$이다. 다음은 상수 p, q를 구하고, 이를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서
> $n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$
> 이므로 $a_2=3$이다.
> 즉, $\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=3 \end{cases}$
> 이므로 연립방정식을 풀면
> $p=$ (가), $q=$ (나)이다.
> 따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=$ (가) $\times n^2+$ (나) $\times n$ …… (*)
> 이다.
> (i) $n=1$일 때,
> $a_1=$ (가) $\times 1^2+$ (나) $\times 1=1$
> 이므로 (*)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
> $a_m=$ (가) $\times m^2+$ (나) $\times m$
> 한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로
> $a_{m+1}=$ (다) $\times a_m=\frac{1}{2}\times$ (라)이다.
> 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 α, β라 하고 (다), (라)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

14

▸ 21054-1104

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(4)=0$이고 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이다.
> (나) $0<h<5$인 임의의 h에 대하여
> $\int_{4-h}^{4} f'(x)\,dx\times\int_{4}^{4+h} f'(x)\,dx<0$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 차의 최솟값은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

15

▸ 21054-1105

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$
> (나) $f'(0)=f'(1)=-3$
> (다) $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지며
> $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이다.

$f(2)$의 값은? [4점]

① -21 ② -19 ③ -17 ④ -15 ⑤ -13

단답형

16
▸ 21054-1106

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_{12}-a_6=30$일 때, $a_{20}-a_{18}$의 값을 구하시오. [3점]

17
▸ 21054-1107

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

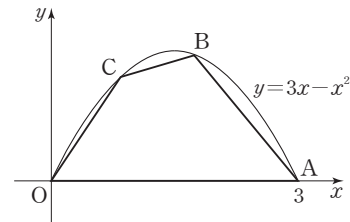
$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$

이고 $g(-1)=9$, $g'(-1)=3$일 때, $f'(-1)$의 값을 구하시오. [3점]

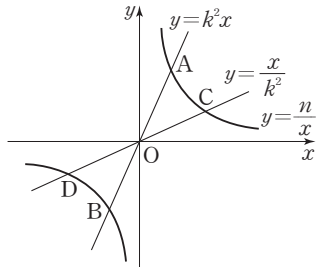
18
▸ 21054-1108

함수 $f(x)=\begin{cases} 4x & (x<8) \\ \log_2 x+29 & (x\geq 8) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $(g\circ g)(a)=4$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. [3점]

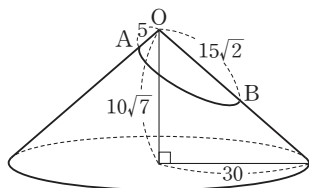
19
▸ 21054-1109

그림과 같이 두 점 O$(0, 0)$, A$(3, 0)$과 곡선 $y=3x-x^2$ $(0<x<3)$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 B, C의 좌표를 각각 B(α, β), C(γ, δ)라 하자. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하시오. (단, $0<\gamma<\alpha<3$) [3점]

20

▸ 21054-1110

$k>1$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 그림과 같이 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 네 수 d, b, a, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 네 수 d, b, a, c의 공차가 16 이하인 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, 점 A와 점 C는 제1사분면의 점이다.) [4점]

21

▸ 21054-1111

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면 위를 움직이는 점 P가 이 원뿔의 꼭짓점 O로부터 거리가 5인 점 A에서 출발하여 꼭짓점으로부터 거리가 $15\sqrt{2}$인 지점 B에 최단거리로 이동하여 도착하였다. 점 P가 이동한 거리를 구하시오. (단, 세 점 A, O, B에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 A′, O′, B′이라 할 때, 점 O′은 선분 A′B′ 위에 있다.) [4점]

22

▸ 21054-1112

15 이하인 두 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$과 곡선 밖의 점 P$(b,\ 0)$이 있다. 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 p, 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

확률과 통계

23

▸ 21054-1113

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{8}\right)$을 따르고 $\mathrm{E}(X)=4$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

24

▸ 21054-1114

자연수 n에 대하여 ${}_{n}\mathrm{H}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{3}$일 때, ${}_{n}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

25

▸ 21054-1115

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^{C}\cup B^{C})=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^{C}은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

26

▸ 21054-1116

어느 과수원에서 생산된 포도 1송이의 무게는 평균이 450 g, 표준편차가 12 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 포도 중에서 임의로 선택한 포도 1송이의 무게가 474 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8185 ② 0.9104 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

27

▸ 21054-1117

7개의 문자 C, U, L, T, U, R, E를 모두 일렬로 나열할 때, 두 문자 C와 L은 문자 T보다 왼쪽에 나열하고 두 문자 R와 E는 문자 T보다 오른쪽에 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 68　② 72　③ 76　④ 80　⑤ 84

28

▸ 21054-1118

상자 안에 흰 공 5개와 검은 공 5개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 상자에서 흰 공 1개를 꺼내고 검은 공 1개를 상자에 넣고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 검은 공 1개를 꺼내고 흰 공 1개를 상자에 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복한 후 처음으로 상자 안에 들어 있는 검은 공의 개수가 6이 될 확률은? [4점]

① $\frac{8}{243}$　② $\frac{1}{27}$　③ $\frac{10}{243}$　④ $\frac{11}{243}$　⑤ $\frac{4}{81}$

단답형

29

▸ 21054-1119

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수가 a일 때, $\frac{a}{10}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \le f(3) \le f(5)$
(나) $f(2) > f(4) > f(6)$

30

▸ 21054-1120

모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 또 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. 부등식 $\frac{43}{28} < \frac{d-c}{b-a} < \frac{43}{14}$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [4점]

5지선다형

01

▸ 21054-1121

$(2\sqrt{2})^{-3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1
④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

02

▸ 21054-1122

함수 $f(x)=(2x-x^2)(x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

03

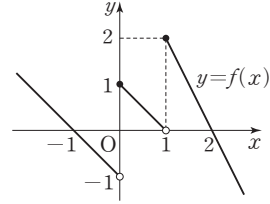
▸ 21054-1123

$0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^{1-x}$이 $2\le x\le 4$에서 최솟값 4를 가질 때, $a\times f(3)$의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 32

04

▸ 21054-1124

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to 1+}f(x)\times\lim_{x\to 0+}f(-x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

05

▸ 21054-1125

$\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2=360$일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

06

▸ 21054-1126

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$2(\cos x-1)^2-3=\sin x-4\cos x$$

의 서로 다른 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

07

▸ 21054-1127

함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-x+2a & (x<1) \\ -x+3a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

08

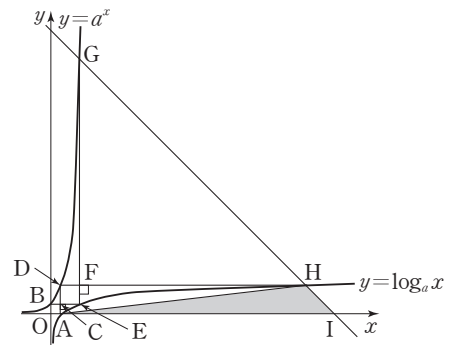
▸ 21054-1128

함수 $f(x)=x^3-3x^2-6x+10$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $A(-1, 12)$, $B(a, f(a))$에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하면 두 직선 l_1, l_2는 서로 평행하다. 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는? [3점]

① $2\sqrt{10}$ ② $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{14\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{16\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

09

▸ 21054-1129

그림과 같이 곡선 $y=\log_a x$가 x축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 D, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 E라 할 때 선분 AD와 선분 BE가 만나는 점을 C라 하자. 점 D를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점 H와 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점 G에 대하여 선분 DH와 선분 EG가 만나는 점을 F라 하고 두 점 G, H를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 I라 하자. 두 정사각형 OACB와 CEFD의 넓이의 비가 1 : 4일 때, 삼각형 AIH의 넓이는? (단, O는 원점이고 $a>1$이다.) [4점]

① $\frac{79}{2}$ ② $\frac{81}{2}$ ③ $\frac{83}{2}$ ④ $\frac{85}{2}$ ⑤ $\frac{87}{2}$

10

▸ 21054-1130

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 할 때, 다음이 성립한다.

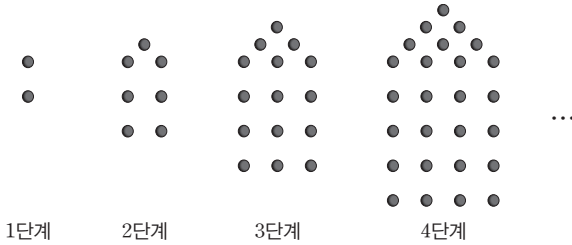
> (가) $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 갖는다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$F(1)-F(-1)=-4$일 때, $F(2)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11

▸ 21054-1131

그림은 일정한 규칙으로 바둑돌을 배열하여 단계별로 나타낸 것이다. n단계에서 사용된 바둑돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 585 ② 590 ③ 595
④ 600 ⑤ 605

12

▸ 21054-1132

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-9x-4$$

가 $x=-1$에서 극값 0을 갖는다. $g'(1)=-8$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

13

▸ 21054-1133

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\frac{(4n+1)\times(2n)!}{2\times n!}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1 \quad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=5$, (우변)$=5$
이므로 $(*)$이 성립한다.
(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{(가)}}{2\times(m+1)!}$$

$$=\frac{\boxed{(나)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1$$

$$=\frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 256 ② 258 ③ 260
④ 262 ⑤ 264

14

▸ 21054-1134

길이가 5인 선분 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q는 점 A에서 동시에 출발하여 점 B에 도달하면 점 A방향으로 움직이고, 점 A에 도달하면 점 B방향으로 움직인다. 출발한 후 t초까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 각각 $2t^3$, $3t^2+12t$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $t=2$일 때, 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다.
ㄴ. $0<t\le2$일 때, 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 2이다.
ㄷ. $0<t\le5$일 때, 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 55이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

▸ 21054-1135

삼차함수 $f(x)=x^3+kx$에 대하여 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 임의의 실수 a에 대하여
$$f'(a)=\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$$
(나) 방정식 $f'(x)\times f'(g(x))=k^2$의 실근 중 0이 아닌 두 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

0이 아닌 실수 x에 대하여 $g(x)\ne x$일 때, $g(k)$의 값은?
(단, k는 음의 상수이다.) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

단답형

16

▸ 21054-1136

등차수열 $\{a_n\}$에서
$a_{10}+a_{20}=50$, $a_{10}-a_{20}=30$
일 때, a_5의 값을 구하시오. [3점]

17

▸ 21054-1137

곡선 $y=(x+2)(x^2-2x+4)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

18

▸ 21054-1138

$0\le x\le2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos 2x+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

19

▸ 21054-1139

함수 $f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$가 $x=1$에서 극솟값 10을 가질 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

20

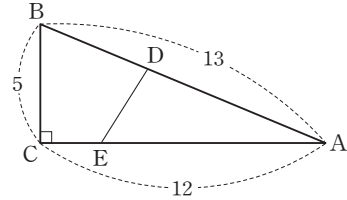
▸ 21054-1140

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때 $S_{15}=S_{10}$이 성립한다. $a_n+25>0$을 만족시키는 n의 최댓값이 19일 때, $\sum_{k=1}^{20}|a_k|$의 값을 구하시오. [4점]

21

▸ 21054-1141

그림과 같이 $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=12$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 D와 변 AC 위의 한 점 E에 대하여 선분 DE가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, 선분 DE의 길이의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [4점]

22

▸ 21054-1142

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수

$$f(x)=\int_0^x t(1-t^n)\,dt \ (n\text{은 자연수})$$

의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}4(n+2)a_n$의 값을 구하시오.

[4점]

5지선다형

확률과 통계

23 ▸ 21054-1143

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [2점]

① $\frac{11}{4}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{35}{12}$
④ 3 ⑤ $\frac{37}{12}$

24 ▸ 21054-1144

다항식

$$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{10}$$

의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 310 ② 320 ③ 330
④ 340 ⑤ 350

25 ▸ 21054-1145

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 6^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(a\le X\le a+4)$의 값이 최대가 되도록 하는 실수 a의 값은? [3점]

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

26 ▸ 21054-1146

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{5}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

27
▸ 21054-1147

그림과 같이 크기가 같은 12개의 정사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 도형에서 6개의 정사각형에는 문자 M이 각각 써넣어져 있다. 이 직사각형 모양의 도형에서 비어 있는 6개의 정사각형에 문자 A와 문자 T 중에서 한 문자만 각각 써넣을 때, 도형에 써넣은 문자가 좌우 대칭이 되는 경우의 수는? [3점]

M		M
M		M
M		M

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

28
▸ 21054-1148

주머니 안에 숫자 1이 적힌 공이 1개, 숫자 2가 적힌 공이 2개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 5번 반복한다. 확인한 5개의 수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{20}{27}$ ② $\frac{61}{81}$ ③ $\frac{62}{81}$
④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{64}{81}$

단답형

29
▸ 21054-1149

어느 공장에서 생산하는 통조림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 15인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 통조림 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 통조림 1개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a \le 4$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

30
▸ 21054-1150

빨간 공 4개, 파란 공 4개, 노란 공 4개를 다음 조건을 만족시키도록 세 개의 주머니 A, B, C에 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 빨간 공이 담긴 주머니의 개수는 2이다.
(나) 빨간 공이 담긴 주머니에는 파란 공과 노란 공이 각각 적어도 1개씩 들어 있다.
(다) 모든 주머니에는 적어도 하나의 공이 들어 있다.